INTEGRAIS DE LINHA

1. Integral de linha de campos escalares

Definição 1.1. *Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]$ uma curva lisa (ou lisa por partes) e $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um domínio D contendo o traço de γ. A integral de linha de f ao longo de γ é definida por*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,d\,s &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt\\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)\,\|\ \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)}\,dt.\end{aligned}$$

Observação 1.2.

- *Nesse contexto, a função real f acima é frequentemente denominada um* campo escalar *(em contraste com campos vetoriais, dos quais trataremos em seguida).*
- *Se f for positiva, a integral de linha pode ser interpretada como a massa de um arame com formato dado pelo traço da curva e densidade f.*

Exemplo 1.3. *Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva parametrizada indicada*

(1) $\int_\gamma z\,d\,s$, $\gamma(t) = (t\cos t, t\ sen t, t)$, $0 \leq t \leq 2$.
(2) $\int_\gamma x\,d\,s$, $\gamma(t) = (\cos t,\ sen t)$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{pi}{2}$.
(3) $\int_\gamma x\,d\,s$, $\gamma(t) = (\ sen 2t,\ sen 2t)$ $0 \leq t \leq \pi$.

Date: November 6, 2023.

Como os exemplos (2) e (3) sugerem, a integral de linha de um campo escalar ao longo da curva γ depende apenas do traço da curva e não da parametrização particular. Para tornar esta afirmação mais precisa, precisamos antes da seguinte definição.

Definição 1.4. *Sejam $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ duas curvas parametrizadas lisas. Dizemos que γ_1 e γ_2* ***diferem por reparametrização*** *se existe uma função $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ bijetora, de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\gamma_2(\alpha(t)) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [a,b]$. A função α é denominada então uma* ***mudança de parametrização.***

Vale então o seguinte resultado:

Proposição 1.5. *Se $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e gamma$_2$ $: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ diferem por reparametrização e $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua definida em um domínio D contendo o traço de γ_1 então $\int_{\gamma_1} f\,d\,s = \int_{\gamma_2} f\,d\,s$.*

Em vista da proposição, podemos calcular a integral de uma curva dado apenas seu traço C, usando qualquer parametrização.

Exemplo 1.6. *Seja C a curva no espaço, dada pela interseção da superfícies $y = x^2$ com o plano $z = x$, $0 \leq x \leq 1$. Calcule $\int_\gamma z\,d\,s$.*