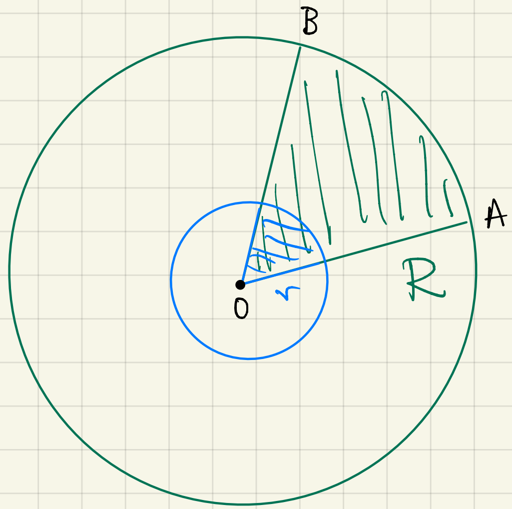
As funções s e c

Semana de 06/11/23

As funções s e c

Vamos agora definir duas funções importantes que vocês "conhecem", mas que é importante que "re-conheçam". Ambas as funções são definidas em toda a reta real e tomam valores em $\mathbb{R}$: $s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mas vamos por partes.

Tomemos um setor circular e consideramos



$$x = 2 \times \frac{\text{área do setor verde}}{R^2}$$

$$= 2 \times \frac{\text{área do setor azul}}{r^2}$$

A igualdade dos dois números é consequência do que discutimos sobre como áreas são afetadas por transformações de similaridade: como o setor verde pode ser obtido do setor azul pela similaridade $(x,y) \longmapsto (kx, ky)$ onde $k = \frac{R}{r}$

a área do setor verde é igual a $R^2 = \left(R/r\right)^2$ vezes a área do setor azul.

Assim

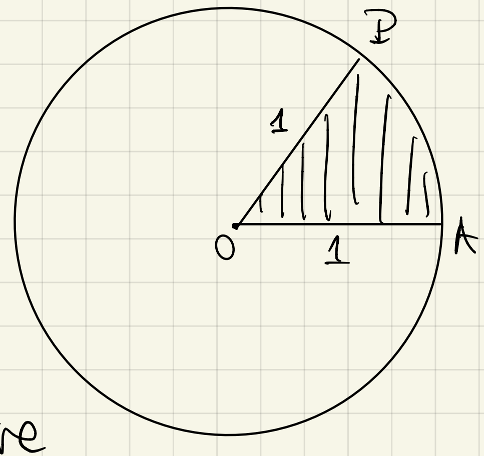
$$x = \frac{\text{área setor verde}}{R^2} = \frac{\left(\frac{R^2}{r^2}\right) \text{área setor azul}}{R^2} = \frac{\text{área setor azul}}{r^2}$$

O número x assim definido é chamado o ângulo do setor AOB e denotado por

$$\boxed{x = \angle AOB}$$

Podemos então escolher qualquer raio para falar do ângulo de um setor e é simples tomar $R = 1$, pois, nesse caso, o ângulo de um setor circular no disco de raio 1 é simplesmente duas vezes a área do setor.

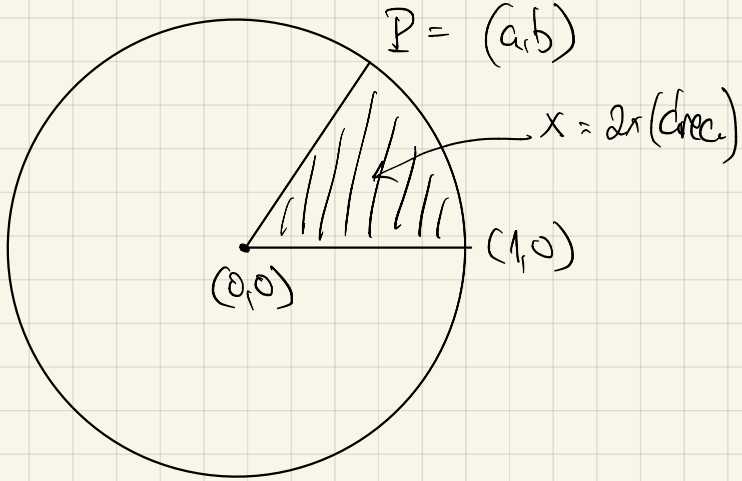
$$\boxed{\angle AOP = 2 \times \left(\text{área do setor (preto) AOP no disco de raio 1}\right)}$$



Lembrando que denotamos a área do disco de raio 1 por π, segue dessa definição que ângulos variam entre 0 e 2π

Vamos agora definir duas funções do ângulo x, mas é mais útil pensar que x é um número real e definir as funções s e c da seguinte maneira:

Formamos o setor circular no círculo de raio 1 centrado na origem do plano cartesiano, cujos vértices são o ponto $(1,0)$, a origem $(0,0)$ e o ponto $P = (a,b)$. Definimos, para $0 \leq x \leq 2\pi$,

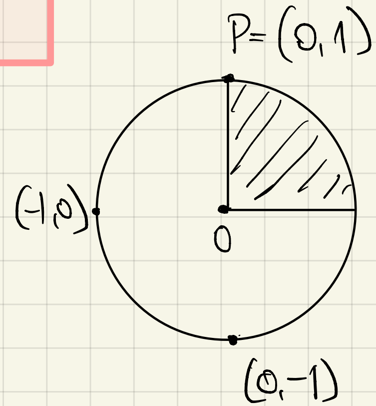


$$\boxed{s(x) = b \quad \text{e} \quad c(x) = a}$$

Note que $s(0) = s(2\pi) = 0$ e $c(0) = c(2\pi) = 1$. Definimos então s e c para outros números reais por periodicidade:

$$\boxed{s(x+2\pi) = s(x) \quad \text{e} \quad c(x+2\pi) = c(x)}$$

Exemplos de valores de s e c: $s(\pi/2) = 1$ e $c(\pi/2) = 0$

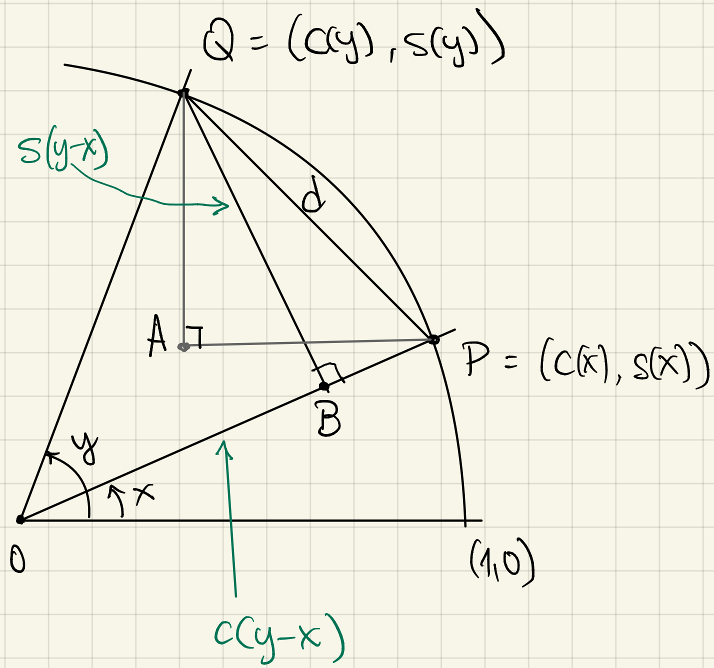


Exercício: Convença-se de que $\begin{cases} s(\pi) = 0, \quad c(\pi) = -1 \quad \text{e} \\ s(3\pi/2) = -1, \quad c(3\pi/2) = 0. \end{cases}$

Teorema: $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$

Prova: Isso é simplesmente o fato de termos definido $c(x) = a$ e $s(x) = b$, onde $P=(a,b)$ é um ponto no círculo unitário. $\square$

Teorema: $c(y-x) = c(y)\,c(x) + s(y)\,s(x)$.



Prova: Veja a figura ao lado. Vamos usar o Teorema de Pitágoras nos triângulos QAP e QBP.

(i) Em QAP: $d^2 = (c(y) - c(x))^2 + (s(x) - s(y))^2$

(ii) Em QBP: $d^2 = s(y-x)^2 + (1 - c(y-x))^2$

De (i), usando o teorema anterior, obtemos

$$d^2 = c(y)^2 + c(x)^2 + s(x)^2 + s(y)^2 - 2c(y)c(x) - 2s(y)s(x)$$
$$= 2(1 - c(y)c(x) - s(y)s(x)).$$

De (ii), obtemos

$$d^2 = s(y-x)^2 + 1 + c(y-x)^2 - 2c(y-x) = 2(1 - c(y-x)).$$

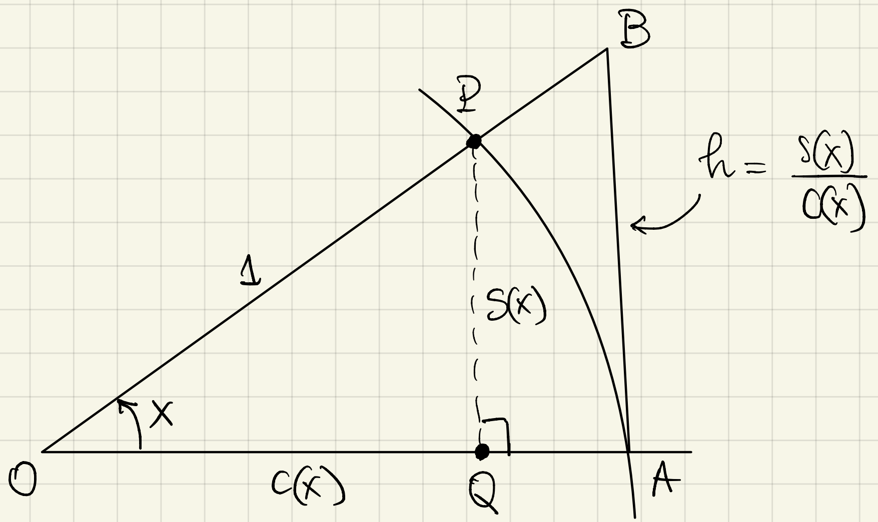
Igualando as duas expressões, obtemos

$$C(y-x) = c(y)\,c(x) + s(y)\,s(x)$$

como queríamos. $\square$

<u>Teorema</u>: Para $0 < x < \pi/2$, valem as seguintes desigualdades:

$$0 < c(x) < \frac{s(x)}{x} < \frac{1}{c(x)}.$$



<u>Prova</u>: A área do setor circular AOP é, por definição de ângulo, igual a $x/2$.

Pela definição das funções $s(x)$ e $c(x)$, a altura do triângulo QOP é $s(x)$ e sua base é $c(x)$. Por similaridade dos triângulos QOP e AOB, a altura de AOB é $s(x)/c(x)$, já que sua base é 1. Portanto a área de AOB é $s(x)/2c(x)$. Além disso, a área do triângulo QOP é $\frac{1}{2}c(x)s(x)$. Como

$$(\text{Triângulo } QOP) \subset (\text{setor } AOP) \subset (\text{Triângulo } AOB)$$

segue que

$$0 < \text{Área (Triângulo QOP)} < \text{Área (Setor AOP)} < \text{Área (Triângulo AOB)}$$

isto é,

$$0 < s(x)\,c(x) < x < \frac{s(x)}{c(x)}$$

que implica as desigualdades do enunciado dividindo por $s(x)$ e lembrando que, para $x \in (0, \pi/2)$, $s(x) > 0$. $\square$

<u>Exercício</u>: Há algo estranho no final dessa prova?

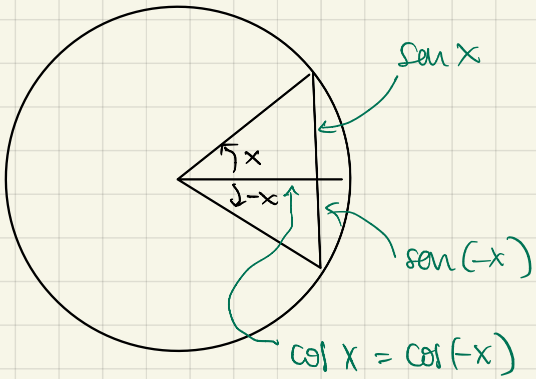
Bem, agora podemos parar de fazer mistério e chamar as funções pelos nomes normais pelos quais conhecemos as funções c e s:

$$\begin{cases} c(x) = \cos x \\ s(x) = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Outras propriedades do seno e coseno:

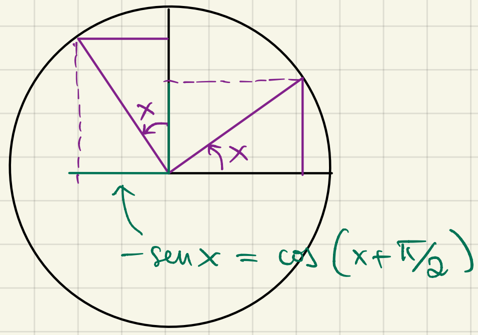
- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (seno é <u>ímpar</u>)

  $\cos(-x) = \cos x$ (coseno é <u>par</u>)



- $\cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x$

  $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$



- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

  $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$

A primeira dessas fórmulas é simplesmente

$$c(y-(-x)) = c(y)\,c(-x) - s(y)\,s(-x)$$

se lembramos que o coseno é uma função par e o seno ímpar.

A segunda é obtida usando as fórmulas acima:

$$\operatorname{sen}(x+y) = -\cos(x+y+\pi/2) = -\cos x \cos(y+\pi/2) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(y+\pi/2)$$

$$= \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y$$

<u>Exercício</u>: Prove as seguintes igualdades:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

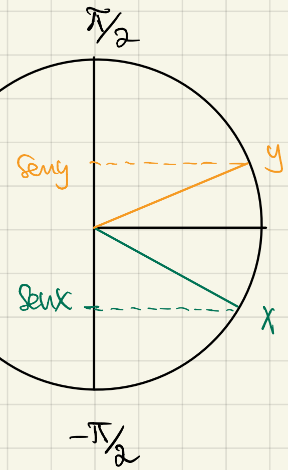
$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

• A função seno é estritamente crescente no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$

A figura ao lado mostra, de forma bastante convincente, que $x < y \Rightarrow \operatorname{sen} x < \operatorname{sen} y$ para $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$.



Outra forma de provar o resultado é usando a igualdade

$$(*) \quad \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{y-x}{2}\right) \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)$$

Isso porque $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $y > x$ implicam $y - x \in (0, \pi)$ e, portanto, $\frac{y-x}{2} \in (0, \pi/2)$, onde o seno é positivo. De maneira análoga, concluímos que $\frac{y+x}{2} \in [0, \pi/2)$, onde o coseno também é positivo. Concluímos então de $(*)$ que a diferença $\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x$ é positiva.

Exercício: Mostre que a função coseno é estritamente decrescente no intervalo $(0, \pi)$.

Agora enunciamos um lema que nós vamos demonstrar, mas cuja prova pode ser encontrada no livro texto:

Lema: Se $0 < a \leq \pi/2$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, valem

$$\boxed{\frac{a}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{ka}{n} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{ka}{n}}$$

Teorema: Para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\int_0^a \cos x \, dx = \operatorname{sen} a \quad \text{e} \quad \int_0^a \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \cos a}$$

Prova: Se $0 < a \leq \pi/2$, a primeira igualdade é consequência direta do lema, já que as expressões à direita e à esquerda são as somas superior e inferior de Riemann da função $\cos x$ no intervalo $[0, a]$. Além disso, a diferença entre elas tende a 0 com $n \to \infty$ e isso implica que

$$\int_0^a \cos x \, dx = \operatorname{sen} a.$$

Que a igualdade vale para todo $a \in \mathbb{R}$ é consequência das várias fórmulas que provamos para seno e cosseno. O mesmo vale para a segunda igualdade. Não faremos os detalhes aqui, pois veremos outra forma de provar este teorema depois que demonstrarmos o Teorema Fundamental do Cálculo. $\square$

Algumas consequências do teorema anterior:

- Usando a aditividade da integral em relação ao domínio de integração

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$$

podemos concluir que

$$\int_a^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$$

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx = (1-\cos b) - (1-\cos a) = -(\cos b - \cos a)$$

Essas duas fórmulas podem ser escritas como:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b \cos x\,dx &= \operatorname{sen} x \Big|_a^b \\ \int_a^b \operatorname{sen} x\,dx &= -\cos x \Big|_a^b \end{aligned}}$$

- Usando a fórmula de expansão / contração do domínio de integração

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right) dx$$

obtemos

$$\int_a^b \cos cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \cos x\,dx = \frac{1}{c}(\operatorname{sen} cb - \operatorname{sen} ca) = \frac{1}{c}\operatorname{sen} cx\,\Big|_a^b$$

e

$$\int_a^b \operatorname{sen} cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{c}(\cos ca - \cos cb) = -\frac{1}{c}\cos cx\,\Big|_a^b$$

- Usando a identidade $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \iff \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, obtemos

$$\int_0^a \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2a\right) = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a$$

Além disso, como $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$,

$$\int_0^a \cos^2 x\,dx = \int_0^a (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx = a - \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a\right) = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a$$

Em particular, para $a = 2\pi$, segue que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \pi$.

<u>Exercícios</u>: 1 a 10, 15 (que vai ser útil mais tarde), 18, 20, 26, 27, 28.

Seção 2.8, p. 104, 105