MAT - 2127 - CÁLCULO II PARA A QUÍMICA
Segunda lista de exercícios - 2023

Máximos e Mínimos

(1) Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

a) $f(x,y,z) = x\mathrm{e}^z + \mathrm{sen}\,(y),\ (2,0,0)$ b) $f(x,y,z) = -\frac{4}{y} + z\ln(x),\ (1,2,-1)$

(2) Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?
c) Qual é a maior taxa de variação em P?

(3) Encontre, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos:
a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x,y) = x^3y$.
b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \ \text{ e } \ z = 2y\}$ e $f(x,y,z) = x - z$.
c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1 \text{ e } (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$ e $f(x,y,z) = xz+y$.
d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

(4) Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D. (Esboce D.)
a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$
b) $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2,\ x \le 0,\ \ y \ge 0\}$
c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$
d) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -3 \le x \le 3,\ \ -3 \le y \le 3\}$.
e) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3,\ \ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\}$

(5) Seja $T(x,y) = \dfrac{4}{x^2+y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x,y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge -x + 1\}$ a temperatura máxima é atingida? E a mínima? Justifique.

(6) Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:
a) $f(x,y) = xy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1,\ \ x \in [1,2]\}$
b) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ \ x \in [0, \frac{1}{4}],\ y \ge 0\}$
Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver esse exercício?

(7) A temperatura num ponto (x,y,z) do espaço é dada por $T(x,y,z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

(8) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:
a) $f(x,y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$
b) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

(9) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em R sendo
a) $f(x,y,z) = x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z$ e $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 56\}$
b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e
$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 4\}$

(10) Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C:

a) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \ \text{ e } \ 4x + 4y = z^2\}$;

b) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \ \text{ e } \ x+y+z = 1\}$;
c) f e C como no exercício 8 (a);
d) f e C como no exercício 8 (b).

(11) Encontre o máximo e o mínimo de $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$ no compacto C.

a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z = 2x + y + 4\}$.
b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \ \text{ e } \ 2z \leq 2x + y + 4\}$.

(12) Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z$. Achar o máximo e o mínimo de f em:

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$;
b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;
c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$;
d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$;
e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq x + y\}$.

(13) Seja $f(x,y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.
a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.
b) Para cada valor de k, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

(14) Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
b) $z = x^2y^2$
c) $z = x^3y^3$
d) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
f) $z = y\cos x$
g) $z = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
h) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
i) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$

(15) Determine os valores de a para os quais a função $f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$.

a) tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
b) tenha exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
d) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

(16) É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

(17) Mostre que a função $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

(18) Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

(19) Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

(20) Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

(21) Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

(22) Ache os máximos e mínimos locais (globais) de $f(x,y)$ na região D.
a) $f(x,y) = -x + 2y + 3$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq -x^2 + 4x\}$;
b) $f(x,y) = -5x + 2y + 3$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x/2 \leq y \leq 2x \text{ e } 1 \leq x \leq 4\}$;
c) $f(x,y) = -x + 2y - 3$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 \leq y \leq x + 3\}$;
d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq x\}$.

(23) (**Método dos Mínimos Quadrados**) Sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq n$ (dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), com $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento, e gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leq i \leq n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i$, $1 \leq i \leq n$, é, em geral, impossível se $n \geq 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, i.e. que minimiza a soma dos quadrados dos erros $E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$. Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.

(24) Seja $f(x,y) = x^2 + y^2 - z^2 + 3$.
a) Mostre que f tem exatamente dois pontos de mínimo e infinitos pontos de máximo locais na esfera $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
b) Determine os pontos de máximo e de mínimo de f em
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1\}$.

(25) Seja $f(x,y,z) = x - 2y - +z^2$. Ache, caso existam, os pontos de máximos e mínimos em
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{e} x - 2y + 2z = 0\}$.

(26) Sejam k um número real não-nulo e $f(x,y) = k\,x^3 + x^2 + 2y^2 - 2x - 2y$, definida em $\mathbb{R}^2$.
a) Ache k de modo que f tenha exatamente 2 pontos críticos;
b) Classifique os dois pontos críticos de f obtidos em (a).

(27) Ache os extremos relativos de f com as restrições dadas, nos seguintes casos:
a) $f(x,y,z) = xz + yz$, com as restrições $x^2 + z^2 = 2$ e $yz = 2$.
b) $f(x,y,z) = xyz$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$.
c) $f(x,y,z) = y^3 + xz^2$, com a restrição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
d) $f(x,y,z) = xyz$ com a restrição $2xy + 3xz + yz = 72$.

Algumas Respostas

1. a) $\sqrt{6}$; $(1,1,2)$ b) $\sqrt{2}$; $(-1,1,0)$.
2. a) $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ b) $(38,6,12)$ c) $2\sqrt{406}$.
3. a) ptos de máx: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}})$; ptos de mín: $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}})$;
b) pto máx: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}})$; pto mín: $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}})$;
c) pto máx: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$; pto mín: $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$;
d) pto mín: $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{5}{6})$; não tem pto de máximo.
4. a) valor máx: $f(4,5) = 13$, valor mín: $f(4,0) = -7$;
b) valor máx: $f(0,0) = 0$, valor mín: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2e}$. c) valor máx: $f(1,0) = 2$, valor mín: $f(-1,0) = -2$.
d) máximo: $f(3,-3) = 57$, mínimo: $f(-2,-1) = -7$; e) máximo: $f(2,0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{-\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

5. Mais quentes: $[1/2, 1/2]$ e o mais frio não existe.
6. a) valor máx: $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$; valor mín: $f(4,-4) = f(-4,4) = -16$;
   b) valor máx: $\frac{2}{\sqrt{3}}$, mín: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$; c) valor máx: $\frac{1}{27}$, valor mín: 0;
   d) valor máx: $\sqrt{3}$, mín: 1.
7. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$; Mais frios : $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.
9. a) valor mín: $f(1,2,3) = -14$, valor máx: $f(-2,-4,-6) = 112$;
   b) valor mín: $f(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}) = -\frac{11}{4}$, valor máx: $f(4,0,0) = 28$.
10. a) ptos de mín.: $(0,1,-2)$ e $(1,0,-2)$, pto de máx: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$;
    b) ptos de mín: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, ptos de máx: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$;
11. a) valor mín: $f(1+\frac{\sqrt{7}}{2}, 2+\sqrt{7}, 4+\sqrt{7}) = -19-6\sqrt{7}$,
    valor máx: $f(1-\frac{\sqrt{7}}{2}, 2-\sqrt{7}, 4-\sqrt{7}) = -19+6\sqrt{7}$;
    b) valor mín: $f(1+\frac{\sqrt{7}}{2}, 2+\sqrt{7}, 4+\sqrt{7}) = -19-6\sqrt{7}$,
    valor máx: $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{2}$.
12. a) pto de máx: $(0,0,-2)$, ptos de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$;
    b) os mesmos que em (a);
    c) pto de máx: $(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, ptos de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$;
    d) os mesmos que em (c);
    e) ptos de máx: $(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{1}{3} \mp \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3})$, pto de mín: $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.
13. b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: $(0,0)$ é ponto mínimo global; $k \leq -1$: $(0,0)$ é ponto máximo global.
14. (chequem possíveis trocas de ítem) a) pto de mín: $(-3,2)$;
    b) ptos de mín: $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
    c) ptos de sela: $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
    d) pto de máx:$(1,1)$, ptos de sela: $(0,0), (2,0), (0,2), (2,2)$;
    e) pto de sela: $(0,0)$, ptos de máx: $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ptos de mín: $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
    f) pto de mín: $(\frac{1}{3}, 0)$.
18. $x + y + 2z - 6 = 0$
19. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
    $2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.
20. base 3×3cm, altura 1,5cm.
21. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.