

Máximos e Mínimos

(1) Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

a) $f(x, y, z) = xe^z + \sin(y)$, $(2, 0, 0)$ b) $f(x, y, z) = -\frac{4}{y} + z \ln(x)$, $(1, 2, -1)$

(2) Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

b) Em que direção V muda mais rapidamente em P ?

c) Qual é a maior taxa de variação em P ?

(3) Encontre, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C , bem como os pontos onde estes valores são assumidos:

a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3y$.

b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$
e $f(x, y, z) = xz + y$.

d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(4) Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D . (Esboce D .)

a) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$

b) $f(x, y) = xy e^{-x^2 - y^2}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$

c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$.

e) $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

(5) Seja $T(x, y) = \frac{4}{x^2 + y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x, y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x + 1\}$ a temperatura máxima é atingida? E a mínima? Justifique.

(6) Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x, y)$ em D sendo:

a) $f(x, y) = xy$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$

b) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \in [0, \frac{1}{4}], y \geq 0\}$

Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver esse exercício?

(7) A temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

(8) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

a) $f(x, y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

b) $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

c) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

(9) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em R sendo

a) $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}$$

(10) Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C :

a) $f(x, y, z) = x + y + z$ e $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 4x + 4y = z^2\}$;

- b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ e $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$;
- c) f e C como no exercício 8 (a);
- d) f e C como no exercício 8 (b).

(11) Encontre o máximo e o mínimo de $f(x, y, z) = 2x + y - z^2$ no compacto C .

- a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z = 2x + y + 4\}$.
- b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}$.

(12) Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z$. Achar o máximo e o mínimo de f em:

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$;
- b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;
- c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$;
- d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$;
- e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq x + y\}$.

(13) Seja $f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.

- a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0, 0)$ é um ponto crítico de f .
- b) Para cada valor de k , classifique o ponto crítico $(0, 0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0, 0)$ é extremo global (absoluto) de f ?

(14) Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

- a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
- b) $z = x^2y^2$
- c) $z = x^3y^3$
- d) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
- e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
- f) $z = y \cos x$
- g) $z = xye^{-x^2-y^2}$
- h) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
- i) $z = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3x - 3y$

(15) Determine os valores de a para os quais a função $f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$.

- a) tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
- b) tenha exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
- c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
- d) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

(16) É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Verifique que $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

(17) Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

(18) Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

(19) Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

(20) Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

- (21) Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.
- (22) Ache os máximos e mínimos locais (globais) de $f(x, y)$ na região D .
- $f(x, y) = -x + 2y + 3$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq -x^2 + 4x\}$;
 - $f(x, y) = -5x + 2y + 3$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x/2 \leq y \leq 2x \text{ e } 1 \leq x \leq 4\}$;
 - $f(x, y) = -x + 2y - 3$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 \leq y \leq x + 3\}$;
 - $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq x\}$.
- (23) (**Método dos Mínimos Quadrados**) Sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq n$ (dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), com $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento, e gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leq i \leq n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i$, $1 \leq i \leq n$, é, em geral, impossível se $n \geq 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, i.e. que minimiza a soma dos quadrados dos erros $E(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$. Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.
- (24) Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - z^2 + 3$.
- Mostre que f tem exatamente dois pontos de mínimo e infinitos pontos de máximo locais na esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
 - Determine os pontos de máximo e de mínimo de f em $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$.
- (25) Seja $f(x, y, z) = x - 2y - z^2$. Ache, caso existam, os pontos de máximos e mínimos em $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ e } x - 2y + 2z = 0\}$.
- (26) Sejam k um número real não-nulo e $f(x, y) = kx^3 + x^2 + 2y^2 - 2x - 2y$, definida em $\mathbb{R}^2$.
- Ache k de modo que f tenha exatamente 2 pontos críticos;
 - Classifique os dois pontos críticos de f obtidos em (a).
- (27) Ache os extremos relativos de f com as restrições dadas, nos seguintes casos:
- $f(x, y, z) = xz + yz$, com as restrições $x^2 + z^2 = 2$ e $yz = 2$.
 - $f(x, y, z) = xyz$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$.
 - $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$, com a restrição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 - $f(x, y, z) = xyz$ com a restrição $2xy + 3xz + yz = 72$.

Algumas Respostas

- $\sqrt{6}$; $(1, 1, 2)$
 - $\sqrt{2}$; $(-1, 1, 0)$.
 - $\frac{32}{\sqrt{3}}$
 - $(38, 6, 12)$
 - $2\sqrt{406}$.
 - ptos de máx: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}})$; ptos de mín: $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}})$;
 - pto máx: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}})$; pto mín: $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}})$;
 - pto máx: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$; pto mín: $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$;
 - pto mín: $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{5}{6})$; não tem pto de máximo.
 - valor máx: $f(4, 5) = 13$, valor mín: $f(4, 0) = -7$;
 - valor máx: $f(0, 0) = 0$, valor mín: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2e}$.
 - valor máx: $f(1, 0) = 2$, valor mín: $f(-1, 0) = -2$.
 - máximo: $f(3, -3) = 57$, mínimo: $f(-2, -1) = -7$; e) máximo: $f(2, 0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, -\frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
-

5. Mais quentes: $[1/2, 1/2]$ e o mais frio não existe.
6. a) valor máx: $f(2, 2) = f(-2, -2) = 4$; valor mín: $f(4, -4) = f(-4, 4) = -16$;
 b) valor máx: $\frac{2}{\sqrt{3}}$, mín: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$; c) valor máx: $\frac{1}{27}$, valor mín: 0;
 d) valor máx: $\sqrt{3}$, mín: 1.
7. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$; Mais frios: $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$.
9. a) valor mín: $f(1, 2, 3) = -14$, valor máx: $f(-2, -4, -6) = 112$;
 b) valor mín: $f(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}) = -\frac{11}{4}$, valor máx: $f(4, 0, 0) = 28$.
10. a) pto de mín.: $(0, 1, -2)$ e $(1, 0, -2)$, pto de máx: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$;
 b) pto de mín: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, pto de máx: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$;
11. a) valor mín: $f(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7}) = -19 - 6\sqrt{7}$,
 valor máx: $f(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 - \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7}) = -19 + 6\sqrt{7}$;
 b) valor mín: $f(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7}) = -19 - 6\sqrt{7}$,
 valor máx: $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{2}$.
12. a) pto de máx: $(0, 0, -2)$, pto de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$;
 b) os mesmos que em (a);
 c) pto de máx: $(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, pto de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$;
 d) os mesmos que em (c);
 e) pto de máx: $(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{1}{3} \mp \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3})$, pto de mín: $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.
13. b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: $(0, 0)$ é ponto mínimo global;
 $k \leq -1$: $(0, 0)$ é ponto máximo global.
14. (chequem possíveis trocas de ítem) a) pto de mín: $(-3, 2)$;
 b) pto de mín: $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
 c) pto de sela: $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
 d) pto de máx: $(1, 1)$, pto de sela: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$;
 e) pto de sela: $(0, 0)$, pto de máx: $\pm (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, pto de mín: $\pm (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$;
 f) pto de mín: $(\frac{1}{3}, 0)$.
18. $x + y + 2z - 6 = 0$
19. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
 $2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.
20. base $3 \times 3\text{cm}$, altura $1,5\text{cm}$.
21. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.