Física 4 IFUSP
2023

Prof. José Roberto B. Oliveira

Prova 1

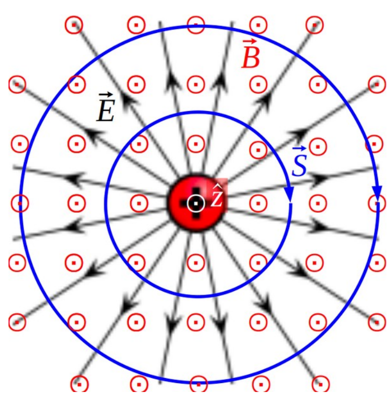
Nome: ____

Número USP/Assinatura: ______________________ / __________________________

1. Uma bolinha pequena com carga elétrica Q positiva uniformemente distribuída no seu interior encontra-se imersa em um campo magnético constante e uniforme $\vec{B}=B\hat{z}$ devido a um grande solenoide cilíndrico. Suponha que a bolinha esteja na origem do sistema de coordenadas $(x,y,z)=(0,0,0)$.
   a) [1,0] Faça um esboço das linhas de campo elétrico e das linhas do vetor de Poynting no entorno da carga, no plano *xy*. Explique.
   b) [1,0] Qual seria a expressão geral para o vetor de Pointing, em coordenadas cartesianas, em um ponto do plano $xy(z=0)$ a uma distância da origem maior do que o raio da bolinha (mas bem menor que o raio do solenoide)?
   c) [1,0] Qual é a densidade de fluxo de potência (potência por unidade de área) no entorno da bolinha, e por que a densidade de energia eletromagnética permanece constante no tempo nessa região?

Resp.:

a) Campo $\vec{E}$ radial. Linhas de $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ são circulares no plano $xy\perp\vec{B}\|\hat{z}$ orientadas conforme o desenho:



b) $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\mu_0}\frac{Q}{(x^2+y^2)^{3/2}}B(x\hat{x}+y\hat{y})\times\hat{z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\mu_0}\frac{Q}{(x^2+y^2)^{3/2}}B(y\hat{x}-x\hat{y})$ (no plano *xy*).

c) Essa densidade de potência é o próprio vetor de Poynting. Suas linhas de campo são fechadas e sua divergência é nula portanto a potência apenas circula uniformemente ao redor da bolinha sem aumentar a concentração de energia em nenhum ponto. Na ausência de correntes a equação de conservação da energia seria:

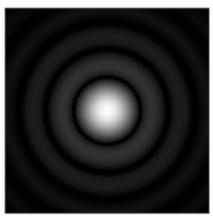
$$\vec{\nabla}S=-\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

2. [3,0] Suponhamos que você precisa projetar um espelho parabólico de um radiotelescópio para captar ondas de rádio na frequência de 150 MHz emitidas por dois quasares (fontes de rádio quase-estelares) separados no céu por um intervalo angular de 0.122 rad (7°). Qual seria o menor diâmetro *D* desse espelho que permitiria distinguir os dois quasares, segundo o critério de Rayleigh? Explique detalhadamente de onde vem esse critério.

   Dados: $c = 3.0\times10^8$ m/s.

   Padrão de difração de Airy para uma abertura circular de raio *a*: $\frac{I(\theta)}{I(0)} = 4\left[\frac{J_1(ka\,\mathrm{sen}\,\theta)}{ka\,\mathrm{sen}\,\theta}\right]^2$.

   Primeiro zero da função de Bessel $J_1(x): x = 1.22\,\pi$.



Padrão de Airy

Resp.:

O diâmetro finito do espelho do telescópio determina um padrão de difração na imagem do plano focal correspondente ao de uma abertura circular (Padrão de Airy).

De acordo com o critério de Rayleigh, a distância angular entre os objetos deve ser pelo menos igual à distância entre o máximo central $(\theta = 0)$ e o primeiro mínimo (zero) do Padrão de Airy, ou seja, quando $ka\sin\theta = 1.22\,\pi$, portanto: $\sin\theta = 1.22\frac{\pi}{k\,a} = 1.22\,\pi\frac{\lambda}{2\,\pi}\frac{2}{D} = 1.22\frac{\lambda}{D}$. Para ângulos pequenos podemos aproximar o seno pelo próprio ângulo de modo que a distância entre os máximos será $\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 0.122\,\mathrm{rad}$. Assim sendo, o diâmetro mínimo para separar as duas imagens será $D = 10\,\lambda$.

Sendo $\lambda = c\,T = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{1.5\times10^8} = 2\,\mathrm{m}$, $D = 20\,\mathrm{m}$.

3. O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana polarizada é descrito em notação complexa por: $\vec{E}=a e^{i\theta}\hat{x}+b e^{i(\theta+\delta)}\hat{y}$ com $\theta=\theta(z,t)=(kz-\omega t)$, onde a, b, e δ são constantes reais.
   a) [1,0] Qual é a direção e sentido de propagação desta onda, e qual é o campo magnético correspondente? Explique.
   b) [1,0] Que relações as constantes a, b, e δ devem obedecer para que a polarização seja circular com o vetor campo elétrico girando no sentido anti-horário no plano *xy* (polarização de mão esquerda), com z fixo, por exemplo, em $z=0$? Explique.
   c) [1,0] Particularize a fórmula do campo elétrico para o caso da onda do item b), e expresse-a em termos dos versores de polarização circular de mão direita $\hat{\varepsilon}_{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-i\,\hat{y})$ e mão esquerda $\hat{\varepsilon}_{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+i\,\hat{y})$.
   d) [1,0] Determine o vetor de Poynting complex $\vec{S}^{+}=\frac{1}{2\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}^{*}$ desta onda de polarização circular de mão esquerda e interprete seu significado.

Resp.:

a) A onda eletromagnética é transversal, portanto deve ter a direção do eixo *z*, que é perpendicular ao plano das componentes do campo, *xy*. A direção e sentido de propagação da onda é a do versor $\hat{z}$ uma vez que suas componentes estão na forma de uma onda progressiva $f(x-vt)$ com $v=\omega/k$. O campo magnético é

$$\vec{B}=\frac{\hat{z}}{v}\times\vec{E}=-\frac{b}{v}e^{i(\theta+\delta)}\hat{x}+\frac{a}{v}e^{i\theta}\hat{y}$$

b) Para polarização circular, as componentes *x* e *y* do campo complexo devem ter o mesmo módulo, portanto $a=b$ (ou, equivalentemente, as amplitudes do campo real devem ser iguais em magnitude). Além disso, devem estar em quadratura. Para que a rotação do vetor campo elétrico no plano *xy* seja no sentido anti-horário, é necessário que $\phi=\omega t=-\theta(z=0,t)$, onde ϕ é o ângulo que o vetor campo elétrico (real) forma com o eixo *x*. Isto ocorre se a diferença de fase entre as componentes é $\delta=\frac{\pi}{2}$ (a menos de um número inteiro de voltas completas no círculo trigonométrico), de modo que:

$$\tan\phi=\frac{\Re(E_y)}{\Re(E_x)}=\frac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\theta}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan(-\theta).$$

c) Para essa onda de polarização circular de mão esquerda:

$$\vec{E}=a e^{i\theta}\hat{x}+b e^{i(\theta+\delta)}\hat{y}=a e^{i\theta}\hat{x}+a e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\hat{y}=a(\hat{x}+i\,\hat{y})e^{i\theta}=\sqrt{2}\,a e^{i\theta}\hat{\varepsilon}_{+}$$

d) O campo magnético é $\vec{B}=\frac{\hat{z}}{v}\times\vec{E}=\frac{a}{v}e^{i\theta}(\hat{y}-i\,\hat{x})=\frac{a}{v}e^{i\theta}(-i)(\hat{x}+i\,\hat{y})=-i\sqrt{2}\frac{a}{v}e^{i\theta}\hat{\varepsilon}_{+}$

O vetor de Poynting complexo é: $\vec{S}^{+}=\frac{1}{2\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}^{*}=\frac{1}{2\mu_0}2\frac{a^2}{v}e^{i\theta}e^{-i\theta}i(\hat{\varepsilon}_{+}\times\hat{\varepsilon}_{-})=\frac{1}{2\mu_0}\frac{a^2}{v}\hat{z}$

Sua parte real (neste caso ele é já é real) representa a potência média por unidade de área transportada pela onda na direção da propagação.