Simulado 4 - SMA0304 - Gabarito

Questão 1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por

$$T((1,0,0)) = (1,0,0,2), T((0,1,0)) = (0,1,-1,0) \text{ e } T((0,0,1)) = (1,-1,1,2).$$

Pode-se afirmar que:

a ( ) $\mathrm{Im}(T) = [\{(2,0,0,4),(1,1,-1,2)\}]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [\{(1,1,-1)\}]$.

b (x) $\mathrm{Im}(T) = [\{(2,0,0,4),(1,1,-1,2)\}]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [\{(-1,1,1)\}]$.

c ( ) $\mathrm{Im}(T) = [\{(1,0,0,2),(0,1,-1,0)\}]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [\{(1,-1,1)\}]$.

d ( ) $\mathrm{Im}(T) = [\{(1,0,0,2),(0,1,1,0\}]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [\{(1,-1,-1)\}]$.

e ( ) Nenhuma das alternativas apresentadas.

Solução: Notemos que

$$\begin{aligned} T((x,yz)) &= T(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)) = xT((1,0,0))+yT((0,1,0))+zT((0,0,1)) \\ &= x(1,0,0,2)+y(0,1,-1,0)+z(1,-1,1,2) = (x+z, y-z, -y+z, 2x+2z). \end{aligned}$$

Portanto

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(T) \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \\ -y+z=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases}$$

e $\mathrm{Ker}(T) = \{(-z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-1,1,1)]$. E

$$\mathrm{Im}(T) = [T((1,0,0)), T((0,1,0)), T((0,0,1))] = [(1,0,0,2),(0,1,-1,0),(1,-1,1,2)].$$

É fácil ver que $(1,-1,1,2) = (1,0,0,2) - (0,1,-1,0)$. Portanto,

$$\mathrm{Im}(T) = [(1,0,0,2),(0,1,-1,0)].$$

Como $(2,0,0,4) = 2(1,0,0,2)$ e $(1,1,-1,2) = (1,0,0,2) + (0,1,-1,0)$ segue que

$$\mathrm{Im}(T) = [(1,0,0,2),(0,1,-1,0)] = [(2,0,0,4),(1,1,-1,2)].$$

Questão 2. Seja $T\colon \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

em que B é a base canônica do $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e C é a base do $\mathbb{R}^3$ dada por $C = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$. Então $T(-1+2t)$ é igual a a ( ) $(1, 4, -7)$.

b ( ) $(-1, 3, 7)$.

c (x) $(1, 5, -2)$.

d ( ) $(-1, -3, 11)$.

e ( ) $(-1, 0, 7)$.

Solução: Defina $p(t) = -1 + 2t$. Como B é a base canônica do $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, segue que a matriz coordenada $(p)_B$ é $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Logo, a matriz coordenada $(T(p))_C$ pode ser obtida pela relação

$$(T(p))_C = [T]_{B,C}(p)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 2+2 \\ -1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$T(p) = 1 \cdot (1, 1, 1) + 4 \cdot (0, 1, 1) - 7 \cdot (0, 0, 1) = (1, 5, -2).$$

Questão 3. Considere a transformação linear $T\colon \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ dada por

$$T(p(x)) = x^2 \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + x \frac{dp(x)}{dx} + p(x).$$

Responda as perguntas seguintes na ordem e escolha a alternativa correspondente.

(I) T é injetiva?

(II) T é sobrejetiva?

(III) T é um isomorfismo?

Assinale uma alternativa correta:

a (x) sim, sim, sim.

b ( ) não, sim, não.

c ( ) sim, não, não.

d ( ) não, não, não.

e ( ) nada se pode afirmar.

Solução:

(I) Seja

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}).$$

Então

$$T(p(x)) = \cdots = 17ax^4 + 10bx^3 + 5cx^2 + 2dx + e = 0$$

somente quando $p(x) = 0$, ou seja, $N(T) = \{0\}$. Logo, T é injetora.

(II) Pela parte anterior, $\dim N(T) = 0$. Daí, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathcal{P}_4(\mathbb{R}).$$

Como $\mathrm{Im}(T) \subset \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, segue que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Logo T é sobrejetiva.

(III) Por (I) e (II), T é bijetiva e, como o domínio o e contradomínio de T têm mesma dimensão, segue que T é um isomorfismo.

Questão 4. Seja T uma transformação linear de V em W, em que $\dim V = 6$ e $\dim W = 3$. Sejam, também, B uma base de V e C uma base de W. Suponha que a matriz da transformação T com respeito a estas bases seja

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 0 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

É correto afirmar que $\dim N(T)$ vale

a ( ) Somente com as informações dadas não dá para saber.

b (x) 3

c ( ) 0

d ( ) 2

e ( ) 4

Solução 1: Escalonando a matriz $[T]_{B,C}$, obtemos

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 0 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

em que fizemos $L1 + L2 \to L2$ e $L1 - L3 \to L3$. Como $T(u)_C = [T]_{B,C} u_B$, então, se $u = (x, y, z, w, s, t) \in N(T)$, devemos ter

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + 7w + 0s + 8t &= 0 \\ z + 2w + 2s + 5t &= 0 \\ -w + 0s - t &= 0. \end{cases}$$

Da 3^a equação, $w = -t$ a qual, substituindo na 2^a equação, nos dá $z = -2s - 3t$. Substituindo estas na 1^a equação do sistema obtemos $x = -2y + 2s - 12t$. Logo,

$$\begin{aligned}(x, y, z, w, s, t) &= (-2y + 2s - 12t, y, -2s - 3t, -t, s, t) \\ &= y(-2, 1, 0, 0, 0, 0) + s(2, 0, -2, 0, 1, 0) + t(-12, 0, -3, -1, 0, 1),\end{aligned}$$

ou seja $N(T) = [(-2, 1, 0, 0, 0, 0), (2, 0, -2, 0, 1, 0), (-12, 0, -3, -1, 0, 1)]$. Como

$$D = \{(-2, 1, 0, 0, 0, 0), (2, 0, -2, 0, 1, 0), (-12, 0, -3, -1, 0, 1)\}$$

é um conjunto L.I (verifique!), então D é base de $N(T)$ e, portanto, $\dim N(T) = 3$.

Solução 2: Note que $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$, pois a matriz escalonada equivalente a $[T]_{B,C}$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O Teorema do Núcleo e da Imagem implica que $\dim N(T) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(T) = 6 - 3 = 3$.

Questão 5. Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z).$$

Determine a transformação inversa T^{-1} usando a matriz $[T]_{C,C}$, em que C é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, e assinale a alternativa correta:

a ( ) $T^{-1}(x, y, z) = \left(x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}y, z + \frac{1}{2}y\right)$.

b ( ) $T^{-1}(x, y, z) = \left(x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}y, z - \frac{1}{2}y\right)$.

c ( ) $T^{-1}(x, y, z) = \left(x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y, z - \frac{1}{2}y\right)$.

d (x) $T^{-1}(x, y, z) = \left(x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y, z - \frac{1}{2}y\right)$.

e ( ) $T^{-1}(x, y, z) = \left(x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y, z + \frac{1}{2}y\right)$.

Solução: Primeiramente, vamos mostrar que T é bijetora e, portanto invertível. Para isso, basta mostrar que T é injetora, já que as dimensões do domínio e do contradomínio coincidem. Assim, para mostrarmos que T é injetora, basta mostrarmos que $N(T) = \{0\}$. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in N(T) &\iff T(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x - y, 2y, y + z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff x = y = w = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Logo $N(T) = \{0\}$ e, portanto, T é invertível.

Agora, vamos determinar T^{-1} usando a matriz $[T]_{C,C}$. Aplicando T em cada elemento da base C, obtemos

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) \\
T(0,1,0) &= (-1,2,1) = -1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1) \\
T(0,0,1) &= (0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$[T]_{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa de $[T]_{C,C}$, obtemos

$$[T^{-1}]_{C,C} = ([T]_{C,C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T^{-1}(1,0,0) &= (1,0,0) \\
T^{-1}(0,1,0) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
T^{-1}(0,0,1) &= (0,0,1)
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\
&= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\
&= x(1,0,0) + y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + z(0,0,1) \\
&= \left(x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y, z - \frac{1}{2}y\right).
\end{aligned}$$

Questão 6. Consideremos as transformações lineares

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x,y) = (x, x+y, 0);$$

2. $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$[S]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

em que B e C são as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sobre a transformação linear $S \circ T$ podemos afirmar que:

a (x) $S \circ T$ é um operador em $\mathbb{R}^2$ invertível.

b ( ) $S \circ T$ é um operador em $\mathbb{R}^2$ não-invertível.

c ( ) $S \circ T$ é um operador em $\mathbb{R}^3$ invertível.

d ( ) $S \circ T$ é um operador em $\mathbb{R}^3$ não-invertível.

e ( ) Nenhuma das respostas anteriores.

Solução: Vejamos que

$$[T]_{C,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e que

$$[S \circ T]_{C,C} = [S]_{B,C}[T]_{C,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que mostra que $S \circ T = Id$ e, portanto, é invertível.

Questão 7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz com respeito à base canônica C de $\mathbb{R}^3$ é

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Podemos afirmar que:

a ( ) T é invertível.

b (x) T não é invertível e $\mathcal{N}(T) = [(1, -2, 1)]$.

c ( ) T não é invertível e $\mathcal{N}(T) = [(-1, -2, 1)]$.

d ( ) T não é invertível e $\mathcal{N}(T) = [(1, -2, 1), (-1, -2, 1)]$.

e ( ) Nenhuma das alternativas anteriores é correta.

Solução: Vejamos que $\det([T]_C) = 0$, de modo que $[T]_C$ não é uma matriz invertível e desse modo T não é um operador linear invertível. Agora, como C é a base canônica, para descrevermos o núcleo de T basta encontrarmos as soluções da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a qual nos fornece que $\mathcal{N}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ e } y = -2z\} = [(1, -2, 1)]$.

Questão 8. Considere as seguintes afirmações:

(I) $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(0) - 1 \\ 2p(-1) & p'(2) \end{pmatrix}$, para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, em que p' denota a derivada de p, é uma transformação linear.

(II) Todo operador linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é um isomorfismo.

(III) Existe uma transformação linear $T\colon \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ injetora.

Assinale a alternativa correta.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h (x) (I), (II) e (III) são falsas.

Solução: (I) Seja $\Theta(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos

$$T(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta(1) & \Theta(0) - 1 \\ 2\Theta(-1) & \Theta'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, T não é uma transformação linear. Portanto, a afirmação (I) é falsa.

(II) Defina $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ por $T(p) = 0, \quad p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

T é um operador linear $N(T) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e, portanto, T não é um isomorfismo. Logo, a afirmação (II) é falsa.

(III) Seja $T\colon \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma transformação linear e suponha que seja injetora. O Teorema do Núcleo e da Imagem implica que

$$5 = \dim \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{Im}(T).$$

Notemos que $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Logo,

$$5 = \dim \mathrm{Im}(T) \leq \dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$$

o que é uma contradição. Portanto, não existe uma transformação linear $T\colon \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ injetora e a afirmação (III) é falsa.

Questão 9. Considere as seguintes afirmações:

(I) Seja V um espaço vetorial de dimensão 8. Existe uma transformação linear $T\colon V \to V$ tal que $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.

(II) Seja V um espaço vetorial de dimensão 4. Então existe uma transformação linear $T\colon V \to V$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

(III) Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Se $\dim U = \dim V - \dim \mathrm{Im}(T)$, então T é injetora.

Assinale a alternativa correta.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d (x) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Solução: (I) Seja $V = \mathbb{R}^8$. Logo $\dim V = 8$ e considere $T\colon \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ dada por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (0, 0, 0, 0, x_5, x_6, x_7, x_8).$$

É claro que T é uma transformação linear e que

$$\operatorname{Ker}(T) = [(1,0,0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,0,0,0,0),(0,0,1,0,0,0,0,0),(0,0,0,1,0,0,0,0)].$$

Como $B_{\operatorname{Ker}(T)} = ((1,0,0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,0,0,0,0),(0,0,1,0,0,0,0,0),(0,0,0,1,0,0,0,0))$ é uma sequência LI, segue que $B_{\operatorname{Ker}(T)}$ é uma base do núcleo de T e $\operatorname{Ker}(T) = 2$.

Notemos que

$$\operatorname{Im}(T) = [(0,0,0,0,1,0,0,0),(0,0,0,0,0,1,0,0),(0,0,0,0,0,0,1,0),(0,0,0,1,0,0,0,0,1)].$$

Como $B_{\operatorname{Im}(T)} = ((0,0,0,0,1,0,0,0),(0,0,0,0,0,1,0,0),(0,0,0,0,0,0,1,0),(0,0,0,1,0,0,0,0,1))$ é uma sequência LI, segue que $B_{\operatorname{Im}(T)}$ é uma base do núcleo de T e $\operatorname{Im}(T) = 2$. Portanto, $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\operatorname{Im}(T))$. Além disso,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(T) &= [(1,0,0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,0,0,0,0),(0,0,1,0,0,0,0,0),(0,0,0,1,0,0,0,0),\\ &\quad (0,0,0,0,1,0,0,0),(0,0,0,0,0,1,0,0),(0,0,0,0,0,0,1,0),(0,0,0,1,0,0,0,0,1)]\\ &= \mathbb{R}^8.\end{aligned}$$

É claro que $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{(0,0,0,0,0,0,0,0)\}$. Logo, $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$. Ou seja, a afirmação (I) é verdadeira.

(II) Defina $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, 0, 0)$.

É claro que T é uma transformação linear. Temos

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker}(T) \iff (x_3, x_4, 0, 0) = (0,0,0,0) \iff x_3 = 0 \text{ e } x_4 = 0.$$

Logo, $\mathrm{Ker}(T) = [(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$. Mais ainda

$$\mathrm{Im}(T) = [T((1,0,0,0)), T((0,1,0,0)), T((0,0,1,0)), T((0,0,0,1))] = [(1,0,0,0),(0,1,0,0)].$$

Portanto, $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$. Ou seja, a afirmação (II) é verdadeira.

(III) Defina $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $T(x_1, x_2) = (x_2, 0, 0)$.

É claro que T é uma transformação linear. Temos

$$\mathrm{Im}(T) = [T((1,0)), T((0,1))] = [(1,0,0)].$$

Logo, $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$ e

$$\dim U = \dim \mathbb{R}^2 = 2 = 3 - 1 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V - \dim \mathrm{Im}(T).$$

Por outro lado,

$$(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(T) \iff x_2 = 0.$$

Logo, $\mathrm{Ker}(T) = [(1,0)] \neq \{(0,0)\}$ e T não é injetora. Ou seja, a afirmação (III) é falsa.

Questão 10. Sejam U, V espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear.

1. Se dim$(U) >$ dim(V), então T não é injetora.
2. Se dim$(U) =$ dim$(V) + 1$ e dim$(\mathcal{N}(T)) = 1$, então T é sobrejetora.
3. Se dim$(U) <$ dim(V), então T não pode ser sobrejetora.

Podemos afirmar que

a (x) As três afirmativas estão corretas.

b ( ) Apenas duas das três afirmativas são corretas.

c ( ) Apenas uma das três afirmativas é correta.

d ( ) Nenhuma das afirmativas é correta.

Solução: Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\text{dim}(U) = \text{dim}(\mathcal{N}(T)) + \text{dim}(\text{Im}(T)).$$

Dessa forma:

1. Se dim$(U) >$ dim(V) e T é injetora, então dim$(\mathcal{N}(T)) = 0$ e dim$(V) <$ dim$(U) =$ dim(Im$(T)) \leqslant$ dim(V), o que é uma contradição. Portanto, T não é injetora.
2. Se dim$(U) =$ dim$(V) + 1$ e dim$(\mathcal{N}(T)) = 1$, então $1 +$ dim(Im$(T)) =$ dim$(U) =$ dim$(V) + 1$, de modo que dim(Im$(T)) =$ dim(V) e T é sobrejetora.
3. Se dim$(U) <$ dim(V), então dim$(V) >$ dim$(U) =$ dim$(\mathcal{N}(T)) +$ dim(Im$(T)) \geqslant$ dim(Im$(T))$ e T não pode ser sobrejetora.