Simulado 3 - SMA304 - Gabarito

Questão 1. Sejam

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,0,3),(0,2,0),(3,2,1)\} \\ B_2 &= \{(1,0,3),(1,2,3),(4,2,4)\} \end{aligned}$$

subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Então é correto afirmar que:

a ( ) B_1 e B_2 são bases de $\mathbb{R}^3$ e a terceira linha de $M_{B_1}^{B_2}$ é $[0\ 1\ 0]$.

b (x) B_1 e B_2 são bases de $\mathbb{R}^3$ e a terceira linha de $M_{B_1}^{B_2}$ é $[0\ 0\ 1]$.

c ( ) Apenas B_1 é uma base de $\mathbb{R}^3$.

d ( ) Apenas B_2 é uma base de $\mathbb{R}^3$.

e ( ) B_1 e B_2 não são bases de $\mathbb{R}^3$.

Solução: Em primeiro lugar, é possível verificar que B_1 e B_2 são conjuntos de vetores linearmente independentes. Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, temos que B_1 e B_2 são bases de $\mathbb{R}^3$. Além disso, escrevamos $v_1 = (1,0,3), v_2 = (1,2,3), v_3 = (4,2,4)$. Então

$$[v_1]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [v_2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [v_3]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$M_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 2. Seja $\mathscr{P}_1(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios da forma $p(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a base $\mathcal{B} = \{2x-2, 2x+2\}$. Se $\mathcal{A}$ for uma base tal que a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$ é dada por

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

então a base $\mathcal{A}$ será dada por

a (x) $\mathcal{A} = \{4x, -6x+2\}$

b ( ) $\mathcal{A} = \{-4x-6, -2\}$

c ( ) $\mathcal{A} = \{2x+2, 2x-2\}$

d ( ) $\mathcal{A} = \{-4x, 6x-2\}$

e ( ) nenhuma das alternativas anteriores.

Solução: Esta questão é bastante trivial e não era preciso inverter a matriz, pois a matriz dada no enunciado já é a matriz que exibe os vetores da base $\mathcal{A}$ em função dos vetores da base $\mathcal{B}$, ou seja, se $\mathcal{A} = \{a_1x + b_1, a_2x + b_2\}$, então

$$\begin{aligned} a_1x + b_1 &= 1(2x-2) + 1(2x+2) \\ a_2x + b_2 &= -2(2x-2) - 1(2x+2) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} a_1x + b_1 &= 4x \\ a_2x + b_2 &= -6x + 2 \end{aligned}$$

lembrando que os coeficientes dos vetores de $\mathcal{A}$ em relação à base $\mathcal{B}$ devem ser as **COLUNAS** da matriz de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A} = \{4x, -6x + 2\}$ e a alternativa correta é a (a).

Questão 3. Sejam V um espaço vetorial, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de V formadas pelos vetores e_1, e_2, e_3 e g_1, g_2, g_3, respectivamente, relacionados da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 &= -e_2 + e_1 + e_3 \\ g_2 &= 2e_2 + 2e_3 \\ g_3 &= e_1 + e_3. \end{cases}$$

Sabendo que as coordenadas do vetor v em relação à base $\mathcal{B}$ são $1, 3, 2$, então as matrizes de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, isto é, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, e da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, isto é, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ e as coordenadas do vetor v em relação à base $\mathcal{C}$ são, respectivamente:

a ( ) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

b ( ) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c (x) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

d ( ) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

e ( ) nenhuma das alternativas anteriores.

Solução: Pelo sistema dado, temos $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Sabemos que $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$. Logo devemos encontrar a matriz inversa de $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Temos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right). \quad \text{Portanto} \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, obtemos $v_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$.

Questão 4. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas bases do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$ tais que

$$\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,i,1),(0,0,i)) \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

a ( ) $\mathcal{C} = ((1, 1+i, 2), (-1, -1+i, 0), (0, -i, 1+i))$.

b ( ) $\mathcal{C} = ((1/2, (1-i)/2, 0), (1/2, (1+i)/2, 1+i/2), (0, 0, i/2))$.

c ( ) $\mathcal{C} = ((1, 1-i, 0), (1, 1+i, 2), (1, 1+i, 2+2i))$.

d (x) $\mathcal{C} = ((1/2, (1-i)/2, 0), (1/2, (1+i)/2, 1), (1/2, (1+i)/2, 1+i))$.

e ( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução: Sabemos que $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}$. Logo devemos encontrar a matriz inversa de $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Portanto,

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$, temos $\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(1,1,1) - \frac{1}{2}(0,i,1) + 0(0,0,i) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, 0\right) \\ f_2 = \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(0,i,1) + 0(0,0,i) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, 1\right) \\ f_3 = \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(0,i,1) + 1(0,0,i) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, 1+i\right). \end{cases}$