UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO OCEANOGRÁFICO

IOF - 201 - Fundamentos de Oceanografia Física

Dinâmica de Fluidos Geofísicos

Profa. Sueli Susana de Godoi

Laboratório de Dinâmica Oceânica

O presente texto das notas de aulas é baseado em:

[1] Gill, A . E. , 1982. Atmosphere-Ocean Dynamics. Academic Press. 662p.

[3] Kundu, P. K. , 1990. Fluid Mechanics. Academic Press, Orlando, Flórida, 638p.

[4] Miranda, L. B. de & Godoi, S. S. de . Análise de Massas de Água nos Oceanos. Instituto Oceanográfico. Universidade de São Paulo. São Paulo, SP. (em preparação).

[5] Pickard, G. L. & Emery, W. J. 1990. Descriptive Physical Oceanography - An Introduction. 5th Edition. Pergamon Press. 320 p.

[6] Pond, S. & Pickard, G. L. ,1991. Introductory Dynamical Oceanography. Pergamon Press. Oxford, UK. Ed.329p.

[7] Silveira, I. C. A. da; Schmidt, A. C. K. ; Campos, E. J. D. ; Godoi, S. S. de & Ikeda, Y. , 2000. A corrente do Brasil ao Largo da Costa Leste Brasileira, Rev. Bras. oceanogr., 48(2):28p.

[8] Silveira, I. C. A. da & Schmidt, A. C. K. Notas de aula sobre Oceanografia Dinâmica. Laboratório de Dinâmica Oceânica. Departamento de Oceanografia Física, Química e Geológica. Instituto Oceanográfico. Universidade de São Paulo. Acessar: http://www.lado.io.usp.br/pt/disciplinas/

[9] The Open University, 1993. Ocean Circulacion. Pergamon Press, 238p.

[10] The Open University, 1993. Seawater: Its Composition, Properties and Behaviour. Pergamon Press, 238p.

3 Equações de conservação

As leis de conservação desempenham um papel absolutamente crítico na Física.

Todas as equações da Oceanografia envolvem a conservação de uma propriedade. Mas o que significa "Equação de conservação"?

$\Longrightarrow$ Rigorosamente, significa que a taxa total de variação total de uma propriedade P é nula. Se existirem forças que alterem P:

$$\underbrace{\frac{DP}{Dt}}_{\text{taxa de variação total de P}} = f_p \qquad \Longrightarrow \qquad \text{fontes ou sorvedouros de P} \tag{3.1}$$

$\Longrightarrow$ Portanto, a taxa de variação total de P é diferente de zero:

$$\text{Se} f_p = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{DP}{Dt} = 0 \tag{3.2}$$

Isto significa que P é constante?

• Do ponto de vista lagrangiano $\Longrightarrow$ sim.

• Do ponto de vista euleriano $\Longrightarrow$ significa que as variações locais são compensadas pelas variações advectivas.

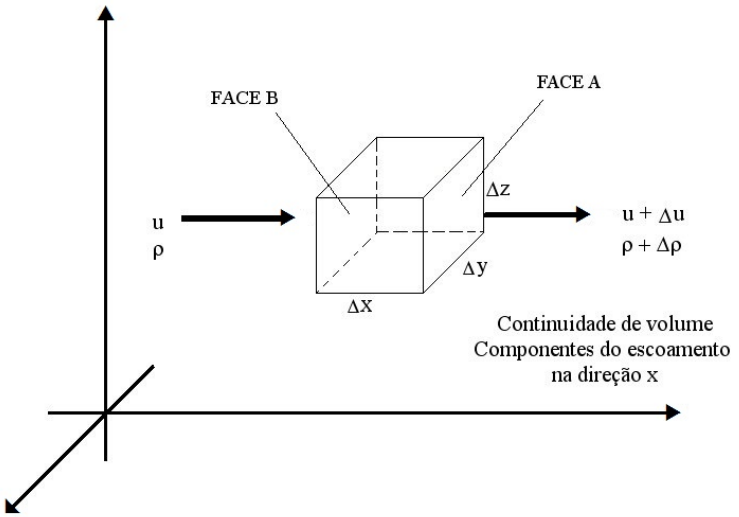
$$\text{Exemplos de P} = \begin{cases} a) & \text{massa e ou volume} \\ b) & \text{momento linear} \Longrightarrow \text{(quantidade de movimento)} \\ c) & \text{momento angular} \\ d) & \text{energia} \\ e) & \text{calor} \end{cases}$$

4 Conservação de massa

$\Longrightarrow$ Aqui se utiliza do príncipio da conservação de massa para derivar a equação da continuidade de volume.

Duas são as formas mais comuns de derivar a equação da continuidade na sua forma diferencial.

A primeira, mais tradicional consiste em analisar fluxos de massa entrando e saindo por um volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ fixo no espaço.



CONTINUIDADE DE VOLUME
COMPONENTES DO ESCOAMENTO NA DIREÇÃO X

Considere nesse exemplo, que tenhamos um transporte de massa somente na direção x.

Através da face B a velocidade é u e a densidade do fluido é ρ.

Através da face A a velocidade do fluido é $u + \Delta u$ e a densidade do fluido é $\rho + \Delta\rho$.

Mas o que é fluxo e transporte?

Fluxo $\Longrightarrow$ é a quantidade de uma propriedade que atravessa uma área em um determinado tempo.

Transporte $\Longrightarrow$ FLUXO $\bullet$ ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL.

A segunda é mais simples e é chamada "Derivação lagrangiana" (Kundu - 1990). Esta faz uso da conotação lagrangiana.

$\Longrightarrow$ Ao invés de assumirmos um volume ΔV fixo no espaço, consideremos um volume movendo-se como um fluido. Este volume tem massa Δm.

O princípio de conservação de massa nos diz que:

$$\frac{D\Delta m}{Dt} = 0 \tag{4.1}$$

A massa do elemento de volume é conservado $\Longrightarrow \Delta m = \text{cte}$, mas:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta m = \rho \Delta V \tag{4.2}$$

Com (5.2) em (5.1):

$$\frac{D}{Dt}(\rho \Delta V) = \rho \frac{D}{Dt}(\Delta V) + \Delta V \frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{4.3}$$

Como $\dfrac{D}{Dt}(\rho \Delta V) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho \dfrac{D}{Dt}(\Delta V) + \Delta V \dfrac{D\rho}{Dt} = 0 \Longrightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}}_{\text{variação fracional da densidade}} + \overbrace{\frac{1}{\Delta V}\frac{D}{Dt}(\Delta V)}^{\text{variação fracional do volume}} \Longrightarrow \text{essas variações fracionais se compensam} \tag{4.4}$$

Escrevendo o termo de variação fracional do volume da seguinte forma:

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{D}{Dt}(\Delta V) \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \frac{1}{\Delta V}\left[\Delta y \Delta z \frac{D}{Dt}(\Delta x) + \Delta x \Delta z \frac{D}{Dt}(\Delta y) + \Delta x \Delta y \frac{D}{Dt}(\Delta z)\right] \quad (*)$$

Mas $\Delta y \Delta z = \dfrac{\Delta V}{\Delta x}$, $\Delta x \Delta z = \dfrac{\Delta V}{\Delta y}$, $\Delta x \Delta y = \dfrac{\Delta V}{\Delta z}$ e

$\dfrac{D}{Dt}(\Delta x) = \Delta u$, $\dfrac{D}{Dt}(\Delta y) = \Delta v$, $\dfrac{D}{Dt}(\Delta z) = \Delta w$, então (*) no limite infinitesimal:

$$(*) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.5}$$

Reescrevendo (5.4)

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}}_{I} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}}_{II} = 0 \tag{4.6}$$

$II \Longrightarrow \nabla \cdot \vec{V}$ (divergente do vetor velocidade).

Fazendo uma análise de escala:

$$I \Longrightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \cdot \frac{U}{L} \quad ; \quad U = \frac{L}{t} \Longrightarrow t = \frac{L}{U} \qquad II \Longrightarrow \frac{U}{L}$$

A razão entre os termos I e II implica:

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}}{\nabla \cdot \vec{V}} = \frac{\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\frac{U}{L}}{\frac{U}{L}} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \Longrightarrow \frac{0(1)}{0(10^3)} \Longrightarrow 0(10^{-3})$$

Assim posso desprezar o primeiro termo:

$\Longrightarrow$ O segundo termo é 10^3 vezes maior que o primeiro.
$\Longrightarrow$ Isto implica que o fluido é incompressível (densidade não varia, se conserva).

$$\text{No Oceano} \qquad \frac{D\rho}{Dt} \cong 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Equação de conservação de densidade} \tag{4.7}$$

$$\text{E} \qquad \nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Equação da continuidade.}$$

Exercício: Usando a equação da continuidade, estime uma escala para a velocidade vertical (w). Suponha movimento de grande, meso e pequena escala.

$$\text{Temos} \qquad \nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Considerando isotropia:

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = O\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = O\left(\frac{U}{L}\right) \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = O\left(\frac{W}{H}\right)$$

$$w = O\left(\frac{U}{L}H\right) \qquad \Longrightarrow \qquad w = O\left(\frac{H}{L}U\right) \qquad w = O(\delta U)$$

$$\frac{H}{L} = \text{razão de aspecto}$$

Análise:

larga escala	meso-escala	pequena escala
H = 10^3	H = 10^3	H = 10
L = 10^6	L = 10^5	L = 10
W = 10^{-3} U	W = 10^{-2} U	W = U

Interpretar os resultados.

5 Equação de Conservação de Momento Linear

$\Longrightarrow$ Momento de linear ou quantidade de movimento é definido como:

$$\text{Momento linear} = m\vec{V} \tag{5.1}$$

Aplicando-se o princípio de conservação de momento linear tem-se:

$$\frac{D}{Dt}(m\vec{V}) = \vec{F} \tag{5.2}$$

A Equação mostra que a variação de momentum não é nula na presença de uma resultante das forças atuantes no elemento de fluido.

Como no oceano há conservação de massa $\frac{Dm}{Dt} = 0$, tem-se:

$$m\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} \qquad\qquad \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a} \tag{5.3}$$

Conclui-se que o príncipio de conservação de momento linear é a segunda lei fundamental da Mecânica $\Longrightarrow \quad m\vec{a} = \vec{F}$, em Oceanografia é conveniente escrever:

$$\vec{a} = \vec{F}/m \tag{5.4}$$

e interpretar a lei como as acelerações observadas são devido a resultante das forças atuantes por unidade de massa.

Antes de descrever quais são e como agem as forças que compõe $\vec{F}$ no segundo membro da equação (5.4), deve-se lembrar que as leis de Newton são válidas apenas para um referencial inercial, tal como um fixo em estrelas distantes.

$\Longrightarrow$ Lembrando que os movimentos oceânicos são estudados em um sistema referencial rigidamente ligado a Terra, que gira com velocidade angular $\vec{\Omega}$.

$\Longrightarrow$ Deve-se então alterar a equação de momentum para que esta se adeque ao referencial em rotação, isto é acelerado.

Objetivo: Encontrar uma forma própria mas alterada da conservação de momento, quando escrita inteiramente observada em um sistema em rotação.

Da (5.4) $\Longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Longrightarrow$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}}_{\text{forças centrífugas}} + \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{F} = \vec{\mathbb{P}} + \vec{\mathbb{G}} + \vec{\mathbb{V}} + \vec{\mathbb{T}}$$

$\mathbb{P}$ = força de gradiente de pressão.
$\mathbb{V}$ = forças viscosas (friccionais).
$\mathbb{G}$ = força de gravidade.
$\mathbb{T}$ = forças geradoras de marés.

$\mathbb{P}, \mathbb{V} \Longrightarrow$ Forças de superfície (externas)
$\mathbb{G}, \mathbb{T} \Longrightarrow$ Forças de corpo (internas)

6 As forças atuantes no oceano

As forças atuantes no oceano podem ser classificadas em diversas formas.

6.1 Forças proporcionais à superfície, ou de superfícies ou externas

- Tais forças atuam na superfície do elemento de volume, sendo proporcionais à área dessa superfície.
- Muitas vezes são referidas como "tensão".
- Dimensionalmente:

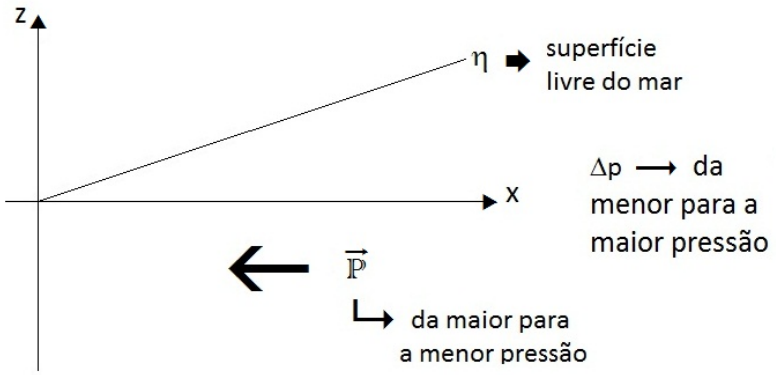
  tensão = força/unidade de área do elemento que atua.
  dimensão = unidade no SI é o Pascal (1 Pa = 1 Nm^{-2}).

- Tensões que atuam perpendiculares à superfície de elemento de volume são tensões normais. Ex: pressão.
- Tensões que atuam paralelas à superfície do elemento são ditas tangenciais. Ex: forças de atrito por unidade de área.

6.1.1 Força de gradiente de pressão

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \tag{6.1}$$

$$\frac{\vec{\mathbb{P}}}{m} = -\frac{\nabla p}{\rho} \Longrightarrow \text{Força de gradiente de pressão por unidade de massa.} \tag{6.2}$$



A força de gradiente de pressão pode ser gerada por:

(i) Pela inclinação da superfície livre do mar (η).
$\Longrightarrow$ dita força barotrópica de gradiente de pressão.
Barotrópico: significa na mesma direção da pressão ou das isóbaras.
(ii) Pela variação espacial de densidade $\rho = \rho(S, T, p)$.
$\Longrightarrow$ dita força baroclínica do gradiente de pressão.
Baroclínico: significa inclinado relativamente à pressão ou às isóbaras.

No oceano real, o balanço hidrostático é uma boa aproximação.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{6.3}$$

Após uma série de considerações e manipulações algébricas, tem-se a a força de gradiente de pressão por unidade de massa é dada por:

$$\nabla_H = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} \Longrightarrow -\frac{1}{\rho}\nabla p = \underbrace{-g\nabla_H \eta}_{(i)} + \underbrace{\frac{g}{\rho}\int_{\eta}^{Z} \nabla_H \rho dz}_{(ii)}$$

(i) Inclinação da superfície livre do mar $\Longrightarrow$ barotrópica.

(*ii*) Variação espacial de densidade $\Longrightarrow$ baroclínica.

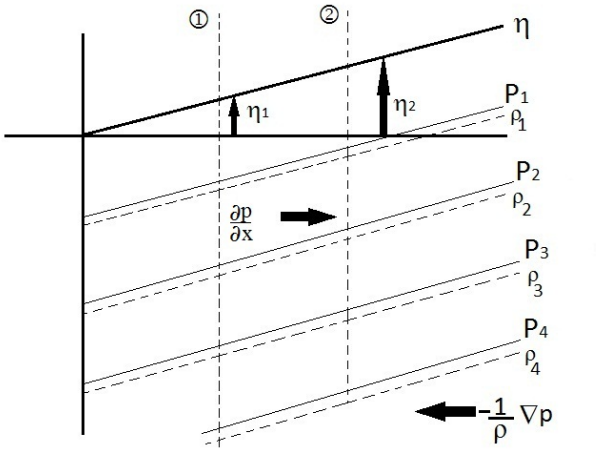
$\Longrightarrow$ O efeito da inclinação da superfície livre:

Barotrópico

O esquema mostra que, para um oceano barotrópico, as isóbaras (linhas de mesma profundidade - p) são paralelas às isopicnais (linhas de mesma densidade - ρ), desde as superfície livre η até o fundo.

O gradiente de pressão na direção x ($\frac{\partial p}{\partial x}$) aponta da menor para a maior pressão.

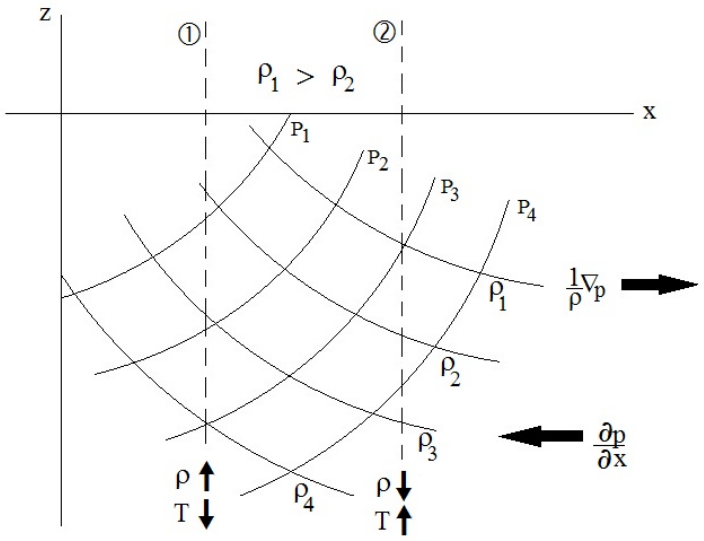
A força do gradiente de pressão por unidade de massa ($\frac{-1}{\rho}\nabla p$) na direção x aponta da maior para a menor pressão.



$\Longrightarrow$ O efeito da variação horizontal de densidade:

Baroclínico

O esquema mostra que, para um oceano baroclínico, as isóbaras (linhas de mesma profundidade - p) cruzam as isopicnais (linhas de mesma densidade - ρ), desde a superfície até o fundo.



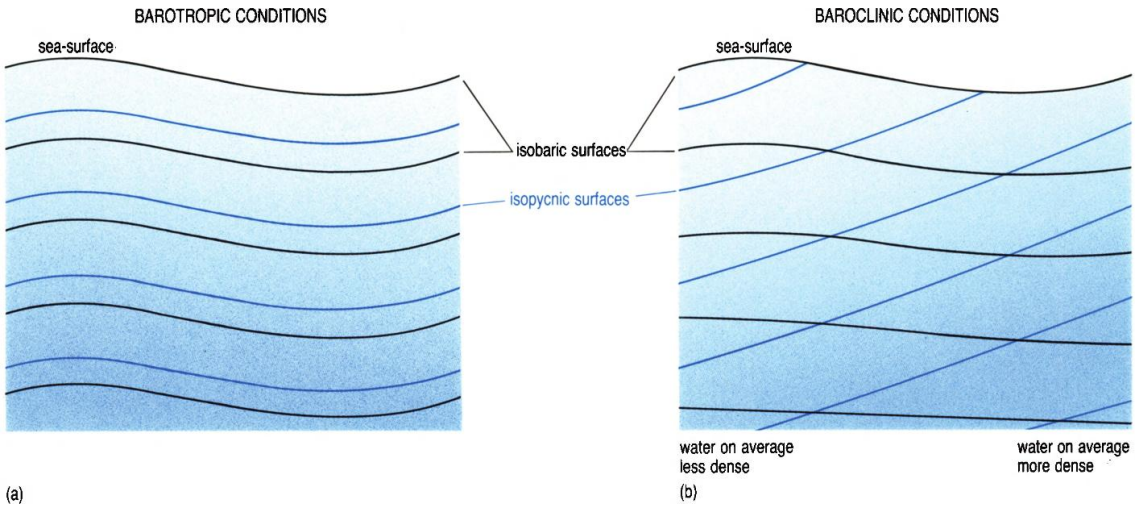
No ponto 1 tem-se ρ maior que no ponto 2.
Se $\rho \uparrow Temperatura(T) \downarrow \Longrightarrow$ conforme indicado no ponto 1.
T é menor o que provoca uma contração de volume de água.

No ponto 2, ocorre o inverso
$\rho \downarrow T \uparrow \Longrightarrow$ há uma expansão de volume.
Dessa forma tem-se a configuração das isóbaras, desconsiderar as variações de η.

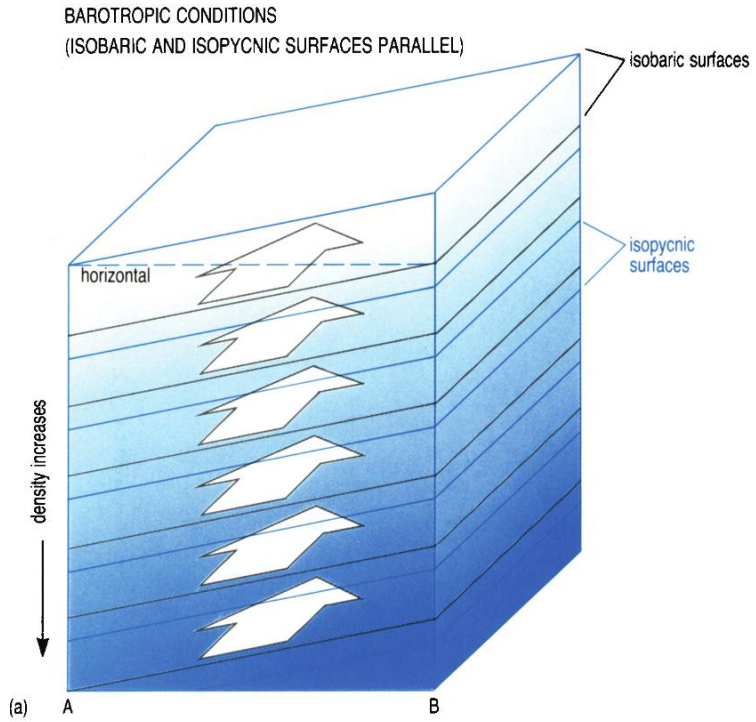
Esquemas: condições barotrópica e baroclínica

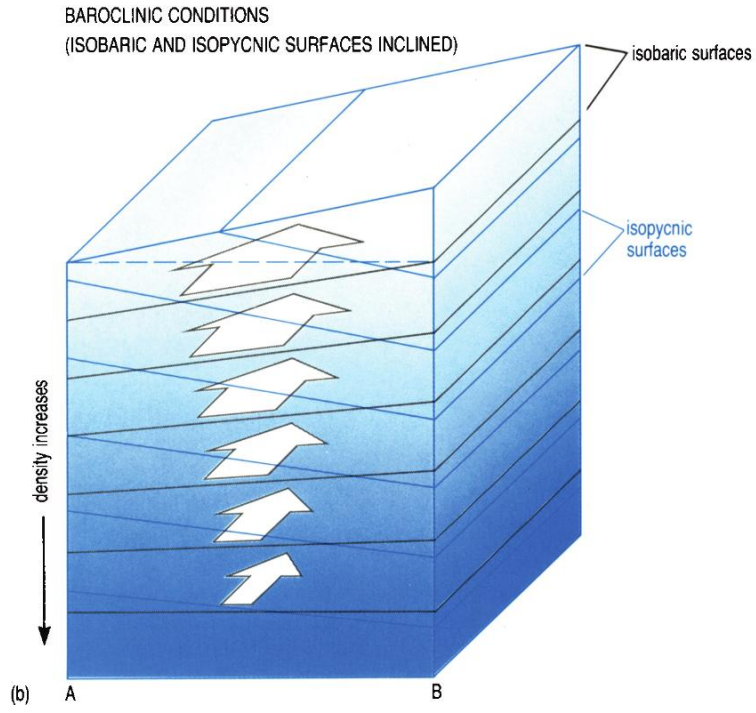
Em situações reais onde as águas do oceano são bem misturadas e, portanto, homogênea, a densidade, no entanto, aumenta com a profundidade devido à compressão causada pelo peso da água sobrejacente. Como resultado, as superfícies isobáricas são paralelas não apenas à superfície do mar, mas também às superfícies de densidade constante ou superfícies isopicnais. Tais condições são descritas como barotrópicas, conforme indicado nos esquemas (a).

Em situações onde há variações laterais de densidade, as superfícies isobáricas não são paralelas à superfície do mar; superfícies isobáricas interceptam as superfícies isopicnais e as duas inclinações estão em direções opostas. Conforme já comentado, tais condições são denominadas como baroclínicas, de acordo com os esquemas (b)



(*The Open University, Ocean Circulation*, 2001)





(*The Open University, Ocean Circulation*, 2001)

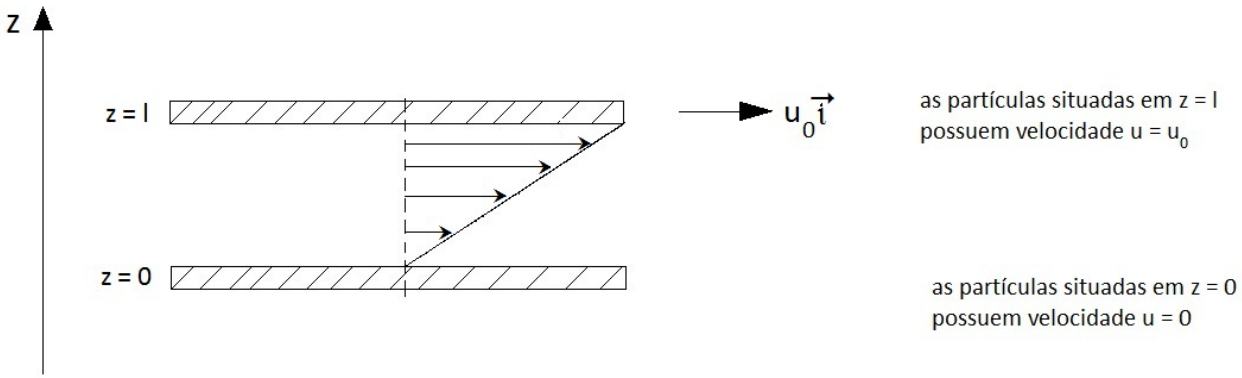
6.1.2 Forças de atrito

A relação entre as tensões tangenciais e propriedades microscópicas do fluido é obtida pela generalização da Lei de atrito de Newton. Essa lei, que é experimental, estabelece que o atrito entre camadas do fluido, em movimento laminar, depende linearmente do cisalhamento da velocidade.

• O experimento de Newton considera:

- Uma camada de fluido está compreendida entre duas placas rígidas, separadas por uma distância "l"

- A placa inferior está em repouso e a placa superior está se deslocando com uma velocidade constante "u_0".



Na superfície do mar a componente vertical da tensão tangencial representa a interação entre vento e água e se chama tensão de cisalhamento do vento.

6.2 Forças proporcionais ao volume ou de corpo ou internas

• Forças que atuam sobre todo o elemento de volume e são proporcionais à massa do elemento. Ex: força de gravidade.

6.2.1 Forças aparentes

• Forças "inventadas" para explicar o movimento em um referencial não inercial.
• São sentidas como forças de corpo.
• Força de Coriolis/unidade de massa $\longrightarrow$ aceleração de Coriolis:

$$2(\vec{\Omega} \times \vec{V}_R) \qquad \vec{V}_R = \text{velocidade relativa} \tag{6.4}$$

• Força centrípeta/unidade de massa:

$$
\begin{aligned}
&-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\perp}) \\
&= -|\vec{\Omega}|^2 \vec{r}_{\perp} \qquad\qquad \perp \rightarrow \text{vetor normal}
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

- Força centrífuga/unidade de massa

$$
\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\perp}) \tag{6.6}
$$

6.2.2 Forças de corpo

$\Rightarrow$ As forças de corpo atuam tridimensionalmente ao fluido ou atuam proporcionalmente ao volume.

$\longrightarrow$ **Força da gravidade por unidade de massa**

A força gravitacional por unidade de massa é devida principalmente à atração gravitacional exercida pela Terra, Sol e Lua. As forças exercidas pela Lua e Sol são responsáveis pelo potencial de marés. Esta força e a aceleração centrípeta, devido à rotação da Terra, podem ser combinadas para formar a força de gravidade por unidade de massa, $\vec{g}$:

7 Equação geral do movimento

$\Longrightarrow$ **Equação de Navier - Stokes**

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + A\nabla^2\vec{V} - \vec{g}$$

Componentes da equação do movimento e demais equações

Lembrando, a equação de conservação da quantidade de movimento se identifica com a equação da Segunda Lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{7.1}$$

Em Oceanografia costuma-se colocar:

$$\vec{a} = \vec{F}/m \tag{7.2}$$

Portanto, a interpretação física que se tem é que as acelerações estão em balanço com as forças atuantes no sistema por unidade de massa. Considerando, agora, a equações das componentes de velocidade nas direções zonal (u), meridional (v) e vertical (w) tem-se:

• Componente u de velocidade $\longrightarrow$ zonal (leste/oeste) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv + \widetilde{f}w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + A_H(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + A_V(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \tag{7.3}$$

Em que:

$f = 2\Omega sen\phi$
$\widetilde{f} = 2\Omega cos\phi$
A_H - coeficiente de viscosidade turbulento horizontal

A_V - coeficiente vertical de viscosidade turbulento vertical

Lembrando o significado dos termos:

$\frac{\partial u}{\partial t}$ = aceleração local;

$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$ = aceleração advectiva ... termos não lineares, pois há o produto de incógnitas;

fv , $\widetilde{f}w$ = componentes da aceleração de Coriolis;
$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x}$ = força de gradiente de pressão por unidade de massa;
$A_H(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ = força de atrito por unidade de massa - componentes horizontais;
$A_V(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$ = força de atrito por unidade de massa - componente vertical

Analogamente para os termos equivalentes das componentes v; w da equação do movimento, onde g é a aceleração da gravidade.

• Componente v de velocidade $\longrightarrow$ meridional (norte/sul) :

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_H(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})+A_V(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) \tag{7.4}$$

• Componente w de velocidade vertical:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\widetilde{f}w=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}-g+A_H(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})+A_V(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) \tag{7.5}$$

$\rightarrow$ Observa-se que no conjunto das equações das componentes de velocidade (u, v e w) há 05 incógnitas: $(u, v, w, p, \rho(S, T))$. Portanto, para solução do sistema pode-se usar a equação da continuidade para um fluido incompressível e a equação de Estado da Água do Mar na forma diferencial. Esta última permite estimar a densidade da água do mar, a qual é uma função da salinidade (S) e temperatura (T). Naturalmente, dependendo do estudo tem-se que elaborar as condições de contorno adequadas.

• Equação da continuidade para um fluido incompressível:

$$\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{7.6}$$

• Equação da conservação de densidade:

$$\frac{D\rho}{Dt}=0 \tag{7.7}$$

•Equação de Estado da Água do Mar, na forma diferencial:

$$\rho = \rho(S,T,p) \longrightarrow d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{T,P} dS + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,S} dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{T,S} dp \tag{7.8}$$

As equações de conservação de calor e de sal, as quais podem ser utilizadas no estudo da termodinâmica da água do mar, são obtidas de forma análoga a equação de conservação de quantidade de movimento. No caso, a rotação da Terra não é considerada e estas podem ser escritas como:

• Equação de Conservação de Calor:

$$\frac{D}{Dt}\rho c_p T = k_T \nabla^2 T \qquad , \tag{7.9}$$

Em que,
c_p : calor específico a pressão constante.
T - temperatura.
k_T - coeficiente de difusão térmica.

•Equação de Conservação de Sal:

$$\frac{D}{Dt}\rho S = k_s \nabla^2 S \qquad , \tag{7.10}$$

Em que:
S - salinidade;
k_s - coeficiente de difusão de sal.

7.1 Análise de escala da equação do movimento

Inicialmente, foi dado uma noção sobre análise de escala e sua importância. A análise de escalas, considerando grande, meso e pequena escalas, das equações do movimento tem por finalidade estimar, inicialmente, a ordem de grandeza dos termos que as compõem. A vantagem da análise de escala consiste em obter uma forma simplificada das equações das componentes de velocidade. Para tanto, há algumas considerações a serem feitas:

- Escrever a equação considerando a dimensão de cada termo;
- Substituir para cada termo o valor característico, para grande, meso ou pequena escalas;
- Escolher um termo base presente na equação, cujo valor é bem conhecido, por exemplo dependendo da componente horizontal ou vertical, aceleração de Coriolis, aceleração da gravidade;

- Fazer a comparação entre a ordem de grandeza dos termos com a ordem de grandeza do termo base;
- Desprezar termos cuja ordem de grandeza é pelo menos 10^2 vezes menor que o termo base;
- Observar o balanço resultante entre aceleração e força por unidade de massa.

Lembrando, o número admensional de Rossby local consiste na razão entre a aceleração local e aceleração de Coriolis; e o número de Rossby advectivo consiste na razão entre a aceleração advectiva e a aceleração de Coriolis. Ambos são utilizados para verificar a importância da rotação da Terra no movimento em estudo, face as acelerações local e advectiva.

Complementando, há também o número admensional de Ekman que consiste em avaliar a importância dos termos de atrito comparados com a rotação da Terra no movimento. No caso, como há componentes horizontais e vertical dos termos de atrito têm-se os números de Ekman horizontal e vertical.

O número de Ekman horizontal consiste na razão entre os termos de atrito horizontais e a aceleração de Coriolis. O número de Ekman vertical consiste na razão entre o termo de atrito vertical e a aceleração de Coriolis.

Naturalmente, se as ordens de grandezas dos números admensionais calculados forem muito menores que 1, a rotação da Terra é importante no movimento.

O estudo da análise de escalas da equação de conservação de quantidade de movimento pode ser complementado com a leitura da Seção 7.3. (Pond & Pickard, 1983).

7.2 Escalas Características de Meso-Escala e Aproximações

H = 10^3 m	$\rho_0 = 10^3$ kg/m^3
L = 10^5 m	$\Delta\rho = 1$ kg/m^3
U = 10^{-1} m/s	$A_V = 10^{-2}$ m^2/s
W = 10^{-3} m/s	$A_H = 10^3$ m^2/s
t= 10^6 s	g = 10 m/s^2

- Aproximações
  - Aproximação da calota esférica
  - razão de aspecto sempre válida
    $\delta = H/R_T = 10^3$ m / 10^6 m = 10^{-3}« 1
    R_T - raio da Terra
  - Aproximação do plano f
  - Permite usar coordenadas cartesianas para estudo de processos com pouca variação de latitude
    L « R_T
  - Aproximação de Boussinesq
  - Consiste em reconhecer que, no oceano, as perturbações de densidade são muito pequenas comparadas com a densidade média
  - Considerando:
    $\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \widetilde{\rho}(x, y, z, t)$
    $\rho(x, y, z, t)$ - quantidade introduzida para movimentos que não satisfazem o equilíbrio hidrostático
    $\rho_0(z)$ - estado básico satisfaz o equilíbrio hidrostático ($\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$)
    $\widetilde{\rho}(x, y, z, t)$ - perturbação de densidade, devido, por exemplo, a passagem de uma onda
    Escrevendo,
    $\rho = \rho_0(1 + \widetilde{\rho}/\rho_0)$
    No caso, $\widetilde{\rho} = \Delta\rho$
    $\rho = \rho_0(1 + 10^{-3})$
    Portanto,
    $\rho = \rho_0$ - densidade média
  - Fluido incompressível
  - Considera a Equação da Continuidade para um fluido incompressível
    $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

- Fluido Invíscido
- Calcular os números de Ekman horizontal (E_H) e vertical (E_V)
- Finalidade: comparar os termos de atrito da equação geral do movimento com a aceleração de Coriolis

  $E_H = A_H(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$ / fv

  $E_V = A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ / fv

  Exercício: Usando as escalas de meso-escala calcular os números de Ekman horizontal e vertical. Interpretar os resultados.
- Substituindo as escalas características

  $E_H = A_H(\frac{U}{L^2} + \frac{U}{L^2})$ / fU

  $E_V = A_V \frac{U}{H^2}$ / fU
- Para verificar a importância da Rotação da Terra pode-se
  calcular o número de Rossby local

  $\epsilon = \frac{1}{ft}$

  t - escala de tempo do movimento que se quer estudar
  ou o Número de Rossby advectivo

  $$\varepsilon = \frac{U}{Lf}$$

  Por exemplo, pode considerar o período de uma onda, tipo *swell*, igual a 10 segundos.
  Considerar médias latitudes.
  Verificar se a rotação pode ser desprezada.
- Com a finalidade de avaliar a importância dos termos não lineares, isto é:

  $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$

  comparar com o termo de aceleração local $\frac{\partial u}{\partial t}$, fazendo análise de escala
- Verificar se os termos lineares podem ou não ser desprezados.
- Fazendo a razão entre os termos de aceleração local e aceleração advectiva:

  $\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{U}{t}}{U\frac{U}{L}}$
- Para isto, assumir valores razoáveis, de mesoescala, para os termos da razão.