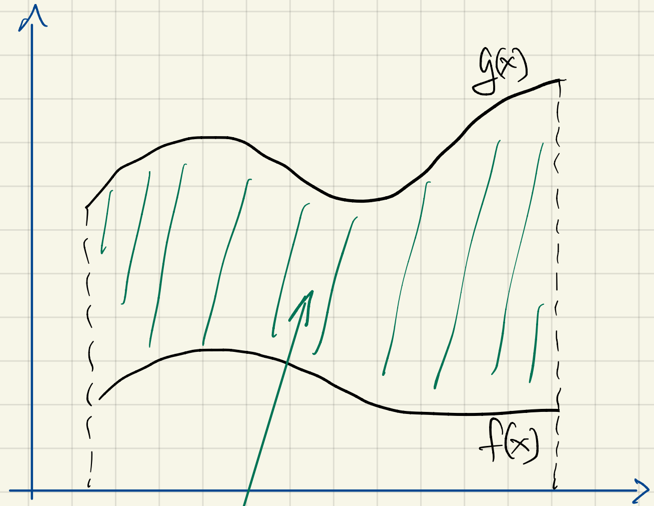
Integração 3

6,7,9/11/23

Aplicações de Integração

Área entre gráficos: Como a integral de uma função é a área entre seu gráfico e o eixo x, calcular a área entre dois gráficos, de f e g, digamos, é fácil: basta tomar a diferença das integrais, ou, o que dá no mesmo, a integral da diferença.



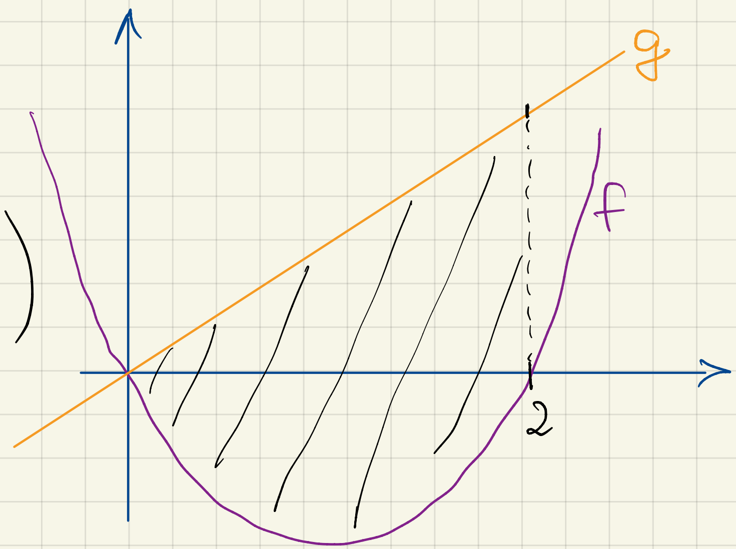
Área entre os gráficos é $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$

Exemplo: A área entre os gráficos de $f(x) = x(x-2)$ e $g(x) = x/2$, sobre o intervalo $[0,2]$ é

$$\int_0^2 \left[\frac{x}{2} - x(x-2)\right] dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2} - x^2 + 2x\right) dx =$$

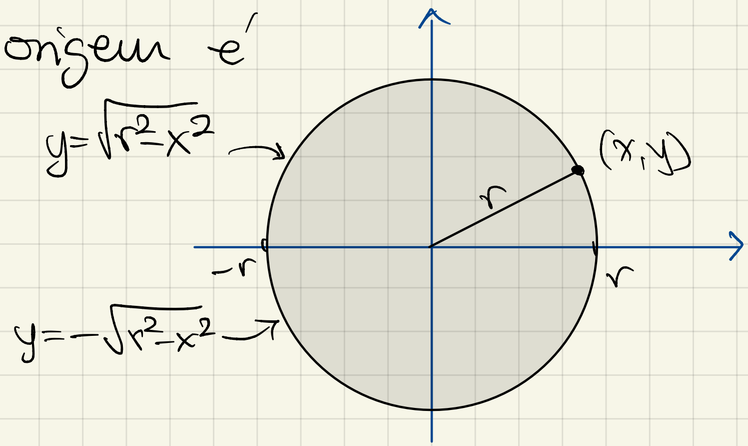
$$= \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x - x^2\right) dx = \frac{5}{2}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$



Área do círculo de raio r

A equação do círculo de raio r com centro na origem é



$$x^2+y^2=r^2$$

Reescrevendo y em termos de x, obtemos

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

Assim, os gráficos de $y=\sqrt{r^2-x^2}$ e $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ são as metades superior e inferior do círculo. Para calcular a área do círculo, basta então calcular a integral de $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ no intervalo $[-r,r]$ e multiplicar por 2. Como $f(x)$ é monótona crescente em $[-r,0]$ e monótona decrescente em $[0,r]$, e como

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_{-r}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{r} f(x)\,dx$$

e como funções monótonas são integráveis, concluímos que f é integrável em $[-r,r]$. Além disso, por simetria, $\int_{-r}^{0} f = \int_{0}^{r} f$.

Concluímos então que a área do disco de raio r, denotada por $A(r)$, é

$$A(r) = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 4\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

Vamos usar a propriedade da integral que vimos anteriormente (com $k = 1/r$):

$$r\int_{\frac{a}{r}}^{\frac{b}{r}} f(rx)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx .$$

$$\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = r\int_{0}^{1}\sqrt{r^2-r^2x^2}\,dx = r^2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Portanto

$$A(r) = 4r^2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = r^2\underbrace{\left(4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right)}_{\text{Mas isso é } A(1)\text{, isto é, a área do círculo de raio } 1.}$$

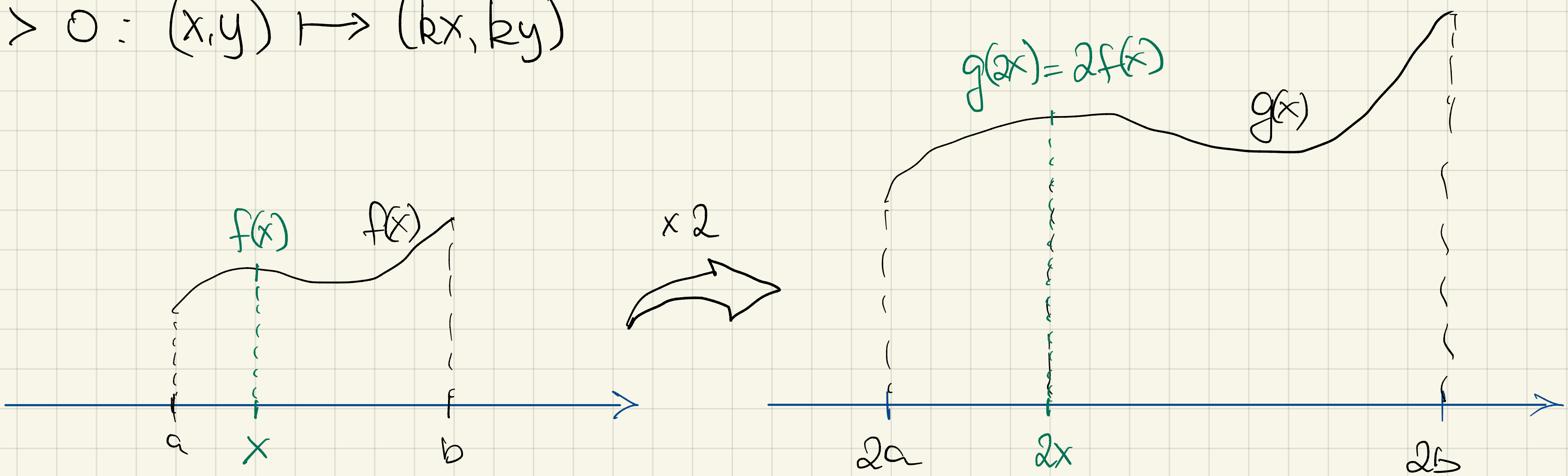
Se chamamos $A(1) = \pi$, o que acabamos de ver é que

$$\boxed{A(r) = \pi\cdot r^2}$$

<u>Obs</u>: Não "calculamos π" aqui; apenas mostramos que $A(r) = r^2\cdot A(1)$.

Áreas e similaridades

Uma transformação de similaridade é uma transformação do plano que contrai ou expande todas as direções, multiplicando-as pelo mesmo fator $k > 0$: $(x, y) \mapsto (kx, ky)$



Para obter o efeito de uma similaridade com o gráfico de uma função $f(x)$, devemos considerar a função

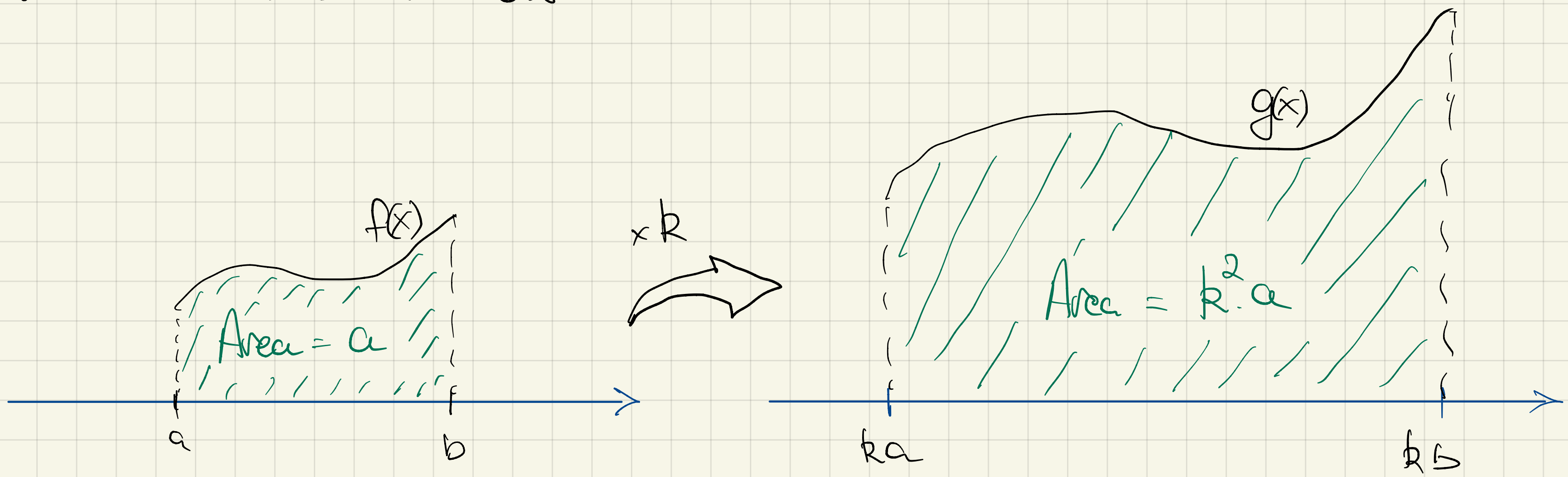
$$g(x) = k\,f\left(\frac{x}{k}\right),$$

já que $kf(x)$ multiplica as ordenadas (eixo y) por k, enquanto $f\left(\frac{x}{k}\right)$ multiplica (!) as abscissas por k.

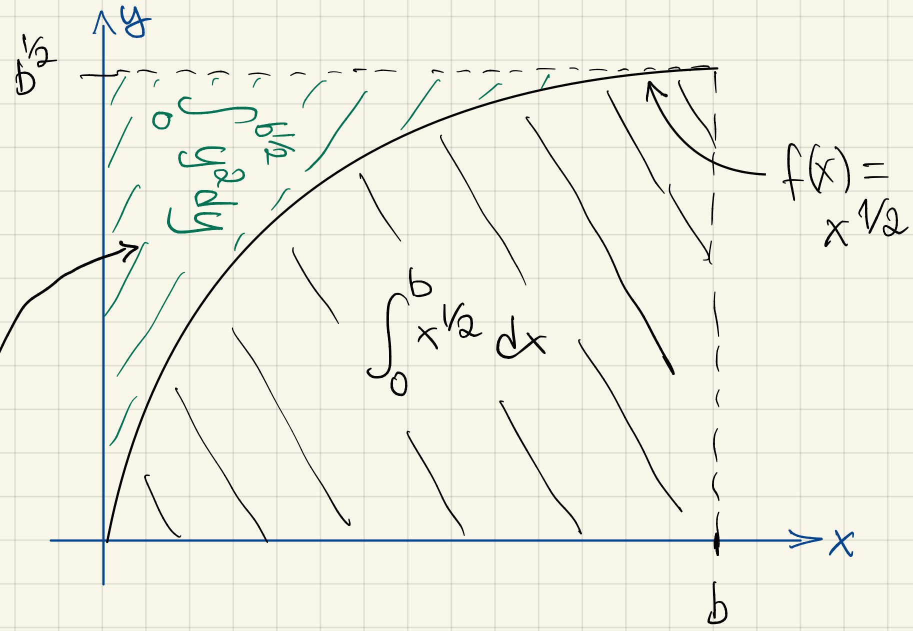
Assim, se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada e $g:[ka,kb] \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = k f(x/k)$, o gráfico de g é obtido do gráfico de f pela similaridade $(x,y) \mapsto (kx, ky)$. Vejamos o que acontece com a área entre o gráfico e o eixo x, isto é, com a integral de g em $[ka,kb]$:

$$\int_{ka}^{kb} g(x)\,dx = \int_{ka}^{kb} k f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k^2 \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

(já que $\int_{ka}^{kb} f(x/k)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$). Isso mostra que transformações de similaridade transformam áreas multiplicando-as pelo quadrado (k^2) do fator de similaridade (k), que foi o que vimos, em particular, no caso da área de um disco.



A integral de $x^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$



Olhando o gráfico de $f(x) = x^{1/2}$ rodando essa página 90^0 no sentido anti-horário (e refletindo), vemos o gráfico de $g(y) = y^2$. Assim, a área nessa parte em verde é, pelo que calculamos anteriormente, $1/3$ da área total do retângulo, isto é,

$$\frac{1}{3}\, b \times b^{1/2} = \frac{1}{3}\, b^{3/2}$$

Portanto, a área restante é $2/3\, b^{3/2}$, isto é,

$$\boxed{\int_0^b x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\, x^{3/2}}$$

Como vimos que $\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$, um raciocínio análogo mostra que

$$\boxed{\int_0^b x^{1/p}\,dx = \frac{b^{1/p+1}}{1/p+1}}$$

Em geral, para $0 \leq a < b$

$$\boxed{\int_a^b x^{1/p}\,dx = \int_0^b x^{1/p}\,dx - \int_0^a x^{1/p}\,dx = \frac{b^{1/p+1} - a^{1/p+1}}{1/p + 1}}$$

Exercícios, seção 2.4, p. 94: 1, 2, 5, 6, 8, 12, 18.