**Física Quântica (4302311) - LISTA 3**

---

O conteúdo teórico coberto por esta lista pode ser encontrado em:

- notas de aulas
- Eisberg & Resnick: cap. 5, cap. 6 e cap. 7 (secs. 7.1-7.6)
- Griffiths: cap. 1, cap. 2 (secs. 2.1, 2.2, 2.6), cap. 4. (secs. 4.1 e 4.2)

---

1. (Griffiths) Em $t = 0$, uma partícula é representada por uma função de onda

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A\frac{x}{a}, & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ A\frac{b-x}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > b \end{cases}$$

onde $A$, $a$ e $b$ são constantes.

(a) Normalize $\Psi$ (i.e., determine $A$ em termos de $a$ e $b$). R: $\sqrt{3/b}$

(b) Esboce $\Psi(x,0)$ em função de $x$.

(c) Onde a partícula tem maior probabilidade de ser encontrada em $t = 0$? R: $x = a$

(d) Qual a probabilidade de encontrar a partícula à esquerda de $x = a$? Teste seu resultado nos casos limites $b = a$ e $b = 2a$. R: $a/b$

(e) Qual o valor esperado de $x$? R: $(2a + b)/4$

2. Considere a função de onda

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{i\omega t},$$

onde $A$, $\lambda$ e $\omega$ são constantes reais positivas.

(a) Normalize $\Psi$. R: $A = \sqrt{\lambda}$

(b) Determine o valor esperado de $x$ e $x^2$. R: $0, \frac{1}{2\lambda^2}$

(c) Determine a variância de $x$. Esboce o gráfico de $|\Psi|^2$ como função de $x$ e marque os pontos $\langle x \rangle \pm \sigma$. Qual a probabilidade de que a partícula seja encontrada neste intervalo de $x$? R: $\frac{1}{2\lambda^2}$, $1 - e^{-\sqrt{2}}$

3. (Griffiths) Uma partícula de massa $m$ encontra-se no estado quântico

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]},$$

onde $A$ e $a$ são constantes reais positivas.

(a) Determine $A$. R: $A = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

(b) Determine a função energia potencial para a qual $\Psi$ satifaz a equação de Schrödinger.

(c) Calcule os valores esperados de $x$, $x^2$, $p$ e $p^2$. R: $0, \frac{\hbar}{4am}, 0, am\hbar$

(d) Determine $\sigma_x$ e $\sigma_p$. O produto dessas quantidades é consistente com o princípio de incerteza? R: $\sqrt{\frac{\hbar}{4am}}, \sqrt{am\hbar}$

4. Suponha que uma partícula comece numa combinação linear de apenas dois estados estacionários $\psi_1$ e $\psi_2$ de energias $E_1$ e $E_2$, respectivamente:

$$\Psi(x,0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$$

onde $c_1$ e $c_2$ são constantes reais. Determine $\Psi(x,t)$ e mostre que $|\Psi(x,t)|^2$ executa oscilações harmônicas, cuja frequência angular depende da diferença de energia entre os estados $\psi_1$ e $\psi_2$.

5. (Griffiths) Calcule $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, $\sigma_x$, $\sigma_p$ for o $n$-ésimo estado estacionário do poço de potencial retangular infinito. Verifique que o princípio de incerteza é satisfeito. Qual o estado que se aproxima mais do limite inferior da desigualdade? R: $\frac{a}{2}, a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right), 0, \left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2$

6. (Griffiths) Uma partícula no poço de potencial retangular infinito tem a seguinte função de onda inicial

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax, & 0 \le x \le a/2, \\ A(a-x), & a/2 \le x \le a \end{cases}$$

(a) Esboce $\Psi(x,0)$ e determine a constante $A$. R: $\frac{2\sqrt{3}}{a^{3/2}}$

(b) Determine $\Psi(x,t)$. R: $\Psi(x,t) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2}\sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n \text{ impar}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-iE_n t/\hbar}, E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

(c) Qual a probabilidade de que uma medida da energia retorne o valor $E_1$? R: $\frac{96}{\pi^4}$

(d) Calcule o valor esperado da energia. R: $\frac{6\hbar^2}{ma^2}$

7. (Griffiths) Analise os estados ligados *ímpares* das funções de onda do poço de potencial retangular finito. Deduza a equação transcendental para as energia permitidas e a resolva graficamente. Examine os casos limites. Sempre existe um estado ligado ímpar?

8. (Griffiths) Considere o potencial degrau:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le 0, \\ V_0, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

(a) Calcule o coeficiente de reflexão para o caso $E < V_0$ e comente sobre sua resposta. R: 1

(b) Calcule o coeficiente de reflexão para o caso $E > V_0$. R: $\frac{\left(\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}\right)^4}{V_0^2}$

(c) Para um potencial como este que não vai a zero à direita da barreira, o coeficiente de transmissão não é simplesmente $|F|^2/|A|^2$ (sendo $A$ a amplitude incidente e $F$ a amplitude transmitida), uma vez que a onda transmitida viaja a uma velocidade diferente. Mostre que

$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \frac{|F|^2}{|A|^2},$$

onde $E > V_0$.

(d) Para $E > V_0$, calcule o coeficiente de transmissãp para o potencial degrau e verifique que $T + R = 1$.

9. Considere uma partícula de energia $E$ atingindo uma barreira de potencial de largura e altura finita

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

(a) Para o caso $E > V_0$, mostre que o coeficiente de transmissão é dado por

$$T = \frac{4E(E - V_0)}{4E(E - V_0) + V_0^2 \sin^2{(k_3 a)}}, \quad k_3 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)}$$

(b) Esboce a transmissão $T$ do item (a) em função da largura $a$ da barreira no intervalo $[0, 3\pi/k_3]$.

(c) Para o caso $E < V_0$, mostre que o coeficiente de transmissão é dado por

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2{(\rho_2 a)}}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}$$

(d) Para o caso do item (c), mostre que no limite de barreira larga $\rho_2 a \gg 1$, temos

$$T \simeq \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\rho_2 a}$$

10. E&R

(a) Calcule o coeficiente de transmissão para um elétron de energia total 2 eV incidente sobre uma barreira de potencial retangular de altura 4 eV e largura 1Å.

(b) Repita o cálculo para uma barreira de 10Å.

11. (Griffiths) Uma partícula de massa $m$ é colocada num potencial esférico de profundidade finita:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{se } r \leq a, \\ 0, & \text{se } r > a, \end{cases}$$

Determine o estado fundamental resolvendo a equação radial com $l = 0$. Mostre que não existe estado ligado se $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$.

12. (Griffiths)

(a) Calcule $\langle r \rangle$ e $\langle r^2 \rangle$ para um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio. Expresse sua resposta em termos do raio de Bohr. R: $3a/2, 3a^2$

(b) Calcule $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ para um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio. Dica: isso não requer nenhuma integração adicional - note que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e explore a simetria do estado fundamental. R: $0, a^2$

(c) Calcule $\langle x^2 \rangle$ para para um elétron no estado $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$. Cuidado: este estado não é simétrico em $x, y, z$. Use $x = r \sin\theta \cos\phi$. R: $12a^2$