

# Lista 3 Relatividade 2023



Professores Ivã Gurgel, Felipe Prado e André Fantin

Adição de Velocidades

**1) Transformando Lorentz 2** (Adaptado de Robilotta et. al.). Escreva as transformações de Lorentz que relacionam as coordenadas da velocidade de um corpo entre os sistemas de Maria e de João nas seguintes situações:

- O corpo move-se com velocidade  $\mathbf{u}_M = u_{xM} \mathbf{i} + u_{yM} \mathbf{j} + u_{zM} \mathbf{k}$  em relação ao referencial de Maria. João se move em relação a Maria com velocidade  $-v$ , segundo o eixo  $y$ .
- O corpo move-se com velocidade  $\mathbf{u}_M = u_{xM} \mathbf{i} + u_{yM} \mathbf{j} + u_{zM} \mathbf{k}$  em relação ao referencial de Maria. João se move em relação a Maria com velocidade  $v$ , segundo o eixo  $x$ .
- O corpo move-se com velocidade  $\mathbf{u}_M = u_{xM} \mathbf{i} + u_{yM} \mathbf{j} + u_{zM} \mathbf{k}$  em relação ao referencial de Maria. João se move em relação a Maria com velocidade  $-v$ , segundo o eixo  $z$ .

**2) Transformando a Velocidade da Luz** (Robilotta et.al.). Um trem move-se em relação ao solo, com velocidade  $\mathbf{v} = v \mathbf{j}$  e, no seu interior, existe uma fonte de luz, que emite um feixe vertical.

- Calcule o vetor velocidade do feixe de luz em relação ao solo;
- Usando o resultado do item anterior, calcule o módulo, a direção e o sentido da velocidade da luz, em relação ao solo. **Dica:** Considere como uma medição da direção da velocidade o coeficiente angular ( $\tan \alpha$ ) do vetor em relação ao referencial do solo.

**3) Velocidade estritamente horizontal** (Robilotta et.al.). Considere a situação descrita no exemplo 1 da aula 23 da apostila do curso. Calcule a velocidade do carro relativamente a João:

- No caso em que ambos têm a mesma velocidade em relação a Maria;
- Quando  $\mathbf{v} = \frac{3c}{5} \mathbf{j}$  e  $\mathbf{u}_M = \frac{4c}{5} \mathbf{j}$ . Qual é a razão entre o módulo dessa velocidade e a previsão clássica?

**4) Encontro Relativístico** (Robilotta et.al.). Maria está parada na origem do referencial  $S_M$ , enquanto que João desloca-se com velocidade constante  $\mathbf{v} = v \mathbf{j}$  ao longo da reta  $x = L, z = 0$ , para o referencial  $S_M$ . No instante em que João cruza o eixo  $x$ , Maria parte ao seu encontro, com a velocidade  $\mathbf{u}_M$ .

# Lista 3 Relatividade 2023



Professores Ivã Gurgel, Felipe Prado e André Fantin

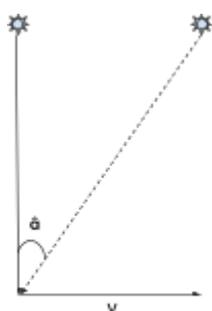
Adição de Velocidades

- Determine o valor de  $u_M$  supondo que o encontro ocorra no instante  $T$ , em  $S_M$ ;
- Neste caso, qual é o vetor velocidade de Maria relativamente a João?

**5) Aproximação Cósmica** (Adaptado de Resnick). Uma partícula de raios cósmicos aproxima-se da Terra, ao longo de seu eixo de rotação, com uma velocidade de  $0,8c$  em direção ao Pólo Norte, e uma outra com velocidade de  $0,6c$ , em direção ao Pólo Sul. Qual a velocidade relativa de aproximação entre as partículas? **Dica:** Use o procedimento apresentado na aula, em que a Terra e uma das partículas são tomadas como os dois referenciais inerciais.

**6) Decaimento Relativístico** (Adaptado de Resnick). Considere um núcleo radioativo movendo-se com uma velocidade uniforme de  $0,05c$  em relação ao laboratório com os seguintes possíveis decaimentos:

- O núcleo se desintegra emitindo um elétron com velocidade de  $0,8c$  ao longo da direção do movimento. Ache o vetor velocidade do elétron no referencial do laboratório;
- O núcleo se desintegra emitindo um elétron com velocidade  $0,8c$  ao longo do eixo  $z$  positivo de seu referencial. Ache o vetor velocidade do elétron no referencial do laboratório;
- O núcleo decai emitindo um elétron de velocidade  $0,8c$  ao longo do eixo  $z$  positivo no referencial do laboratório. Ache o vetor velocidade do elétron no referencial de repouso do núcleo.



**7) Aberração Estelar** (Adaptado de Eisberg & Lerner). Na imagem a seguir, estão representadas as posições real e aparente de uma estrela em relação à Terra, cuja velocidade de translação é  $V$ .

**a)** Mostre, usando a fórmula da adição de velocidades relativística, que o módulo da velocidade da luz no referencial terrestre é  $c$ .

**b)** Em seguida, mostre que  $\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{V}{c}$  e avalie  $\hat{\alpha}$  para a velocidade de translação terrestre  $V = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$ .

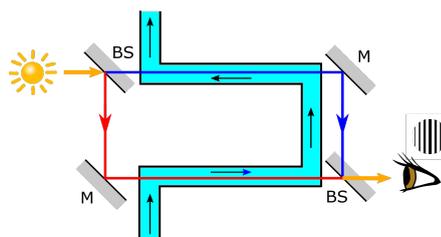
# Lista 3 Relatividade 2023



Professores Ivã Gurgel, Felipe Prado e André Fantin

Adição de Velocidades

**8) Obtendo o arraste de Fresnel.** Obtenha a expressão para a velocidade da luz em um meio transparente derivada da hipótese do arraste parcial do éter



de Fresnel -  $\frac{c}{n} \pm V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ , em que o sinal depende do sentido de  $V$  - aplicando diretamente a fórmula da adição de velocidades relativística ao experimento de Fizeau, em que a luz move-se com velocidade  $\frac{c}{n}$  no interior da água corrente -  $n$  sendo o

índice de refração da água - que move-se na mesma direção da luz com velocidade  $V$ .

**Dica:** Faça uso da aproximação binomial  $(1 + x)^n \sim 1 + nx$  e despreze potências de  $\beta = \frac{V}{c}$  de ordem  $> 1$ , considerando que  $V \ll c$ .

**9) Perseguição Relativística** (Adaptado de Gazzinelli). Uma espaçonave de piratas espaciais carregando o butim de sua última investida criminosa move-se com velocidade  $0,9 c$  em relação à Terra. Qual deve ser a velocidade em relação à Terra de uma espaçonave de patrulheiros espaciais que deseja ultrapassá-la sustentando uma velocidade relativa de  $0,5 c$ ?

**10) Perseguição Relativística 2** (Adaptado de Eisberg & Lerner e Robilotta et.al.). Considere como evento de referência a espaçonave dos piratas espaciais passando pela Terra com velocidade  $v$  em relação ao referencial terrestre. Em um certo instante de tempo  $t_1$  no referencial terrestre, um segundo evento ocorre - marcado pela partida da nave dos patrulheiros espaciais da Terra, com uma velocidade  $V > v$  para alcançar os meliantes.

- Escreva as coordenadas desse segundo evento no referencial terrestre e no dos piratas;
- Considere como um terceiro evento o encontro da espaçonave dos patrulheiros com a dos piratas, que ocorre em um instante  $t_2$  no referencial terrestre. Escreva suas coordenadas no referencial terrestre e no dos piratas;

# Lista 3 Relatividade 2023



Professores Ivã Gurgel, Felipe Prado e André Fantin

Adição de Velocidades

- c) Obtenha a distância e o intervalo temporal total coberto durante a perseguição, segundo o referencial dos piratas;
- d) Obtenha a velocidade relativa entre os patrulheiros e os piratas dividindo a distância pelo tempo obtidos no item anterior;
- e) Obtenha a velocidade relativa entre os patrulheiros e os piratas aplicando diretamente a fórmula da adição de velocidades relativística.
- f) Compare os resultados obtidos nos dois itens anteriores.

**11) Devagar e sempre 3.** Considerando a aproximação  $(1 + x)^n \sim 1 + nx$  quando estamos no limite de baixas velocidades ( $v \ll c$ ), que expressões obtemos para a adição de velocidades relativística:

- a)  $u_{xJ} = u_{xM}/\gamma(1 - v u_{yM}/c^2)$ ;
- b)  $u_{yJ} = (u_{yM} - v)/(1 - v u_{yM}/c^2)$ ;
- c)  $u_{zJ} = u_{zM}/\gamma(1 - v u_{yM}/c^2)$ ;
- d) Justifique porque as expressões para a adição de velocidades de Galileu podem ser consideradas adequadas nesse regime de velocidades.

**Dica:** Quando  $v \ll c$ , potências de  $\beta = \frac{v}{c}$  de ordem  $> 1$  são desprezíveis.