Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

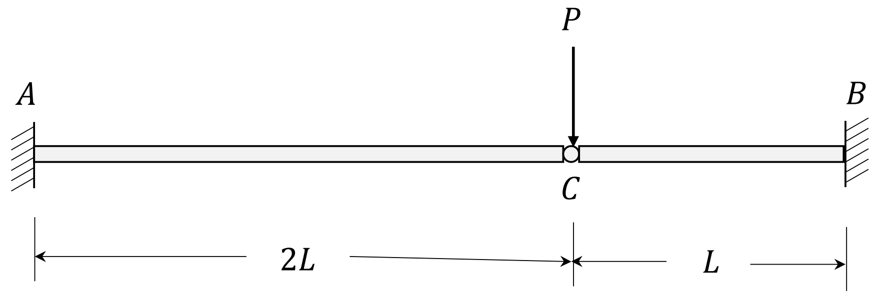
Aula #21

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

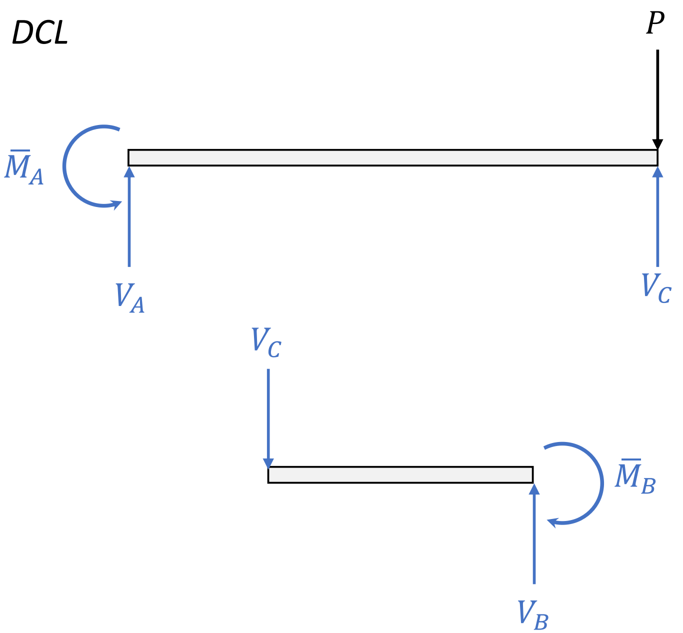
01/11/2023

Exercício

A estrutura da figura é formada por duas barras prismáticas de mesma rigidez flexional EI. Pede-se determinar as reações e a rotação da barra CB junto à articulação.



- *DCL*



- *Equilíbrio:*
  - *Barra AC:*

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C - P = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow (V_C - P)2L + \bar{M}_A = 0$$

  - *Barra CB:*

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_B - V_C = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow V_C L - \bar{M}_B = 0$$

- *Grau de hiperestaticidade:*

$$g = 1$$

- *Incógnita hiperestática:*

vou escolher V_C

- *Princípio da Energia Complementar Mínima:*

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_C} = 0$$

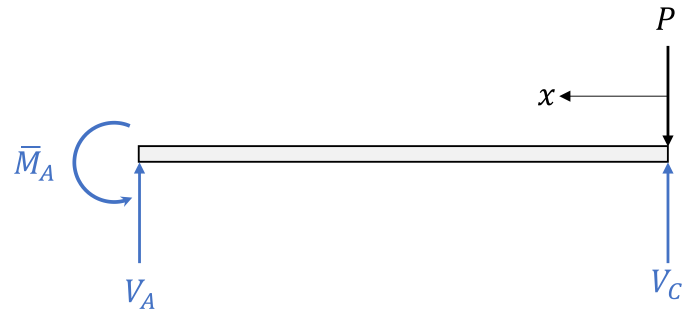
Tenho que escrever U^* como função de V_C

(não podem aparecer em U^*as outras incógnitas vinculares)

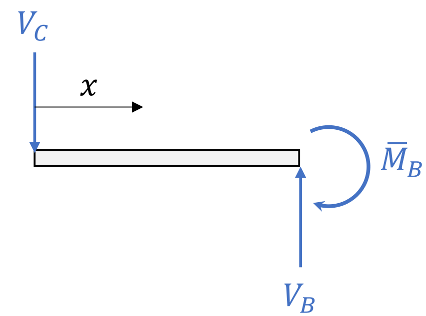
$$U^* = U^*_{AC} + U^*_{CB}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial V_C} = \frac{\partial U^*_{AC}}{\partial V_C} + \frac{\partial U^*_{CB}}{\partial V_C} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2L} M_{AC}(x)\frac{\partial M_{AC}}{\partial V_C}dx + \int_0^{L} M_{CB}(x)\frac{\partial M_{CB}}{\partial V_C}dx = 0$$



$$M_{AC}(x) = (V_C - P)x \qquad \frac{\partial M_{AC}}{\partial V_C} = x$$



$$M_{CB}(x) = V_c x \qquad \frac{\partial M_{CB}}{\partial V_c} = x$$

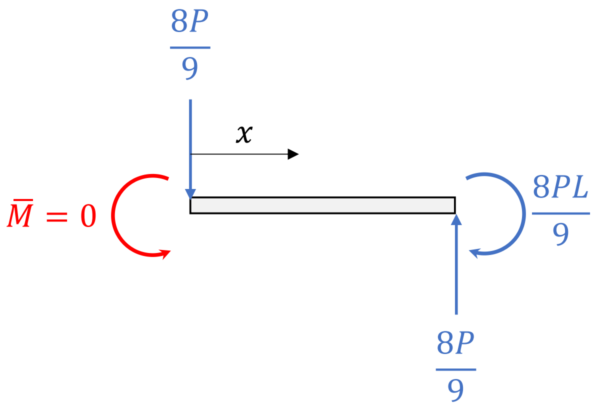
$$\Rightarrow V_C = \frac{8P}{9}$$

- *As outras reações são calculadas a partir das equações de equilíbrio:*

$$V_A = \frac{P}{9} \qquad \bar{M}_A = \frac{2PL}{9}$$

$$V_B = \frac{8P}{9} \qquad \bar{M}_B = \frac{8PL}{9}$$

- *Cálculo da rotação:*



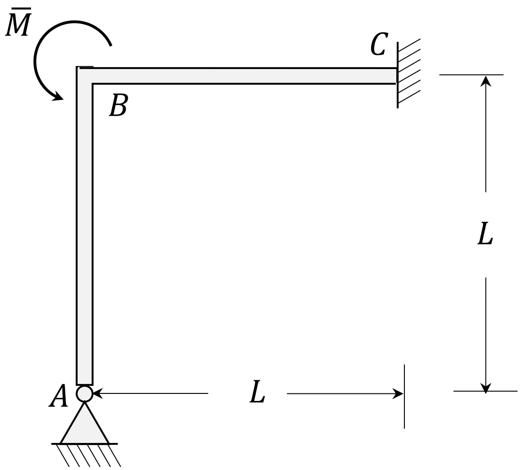
$$\theta = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} = \frac{1}{EI}\int_0^L M(x)\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}dx$$

$$M(x) = -\left(\bar{M} + \frac{8P}{9}x\right) \qquad \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

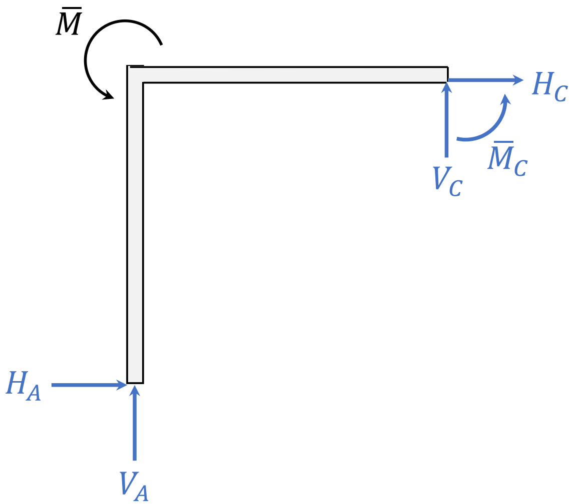
$$\Rightarrow \theta = \frac{4PL^2}{9EI}$$

Exercício

O pórtico da figura é formado por barras prismáticas com rigidez flexional EI. Calcular a rotação em B. Desprezar os efeito das forças normais e cortantes.



- *DCL*



- *Grau de hiperestaticidade:*

$$g = 2$$

- *Equilíbrio:*

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0$$

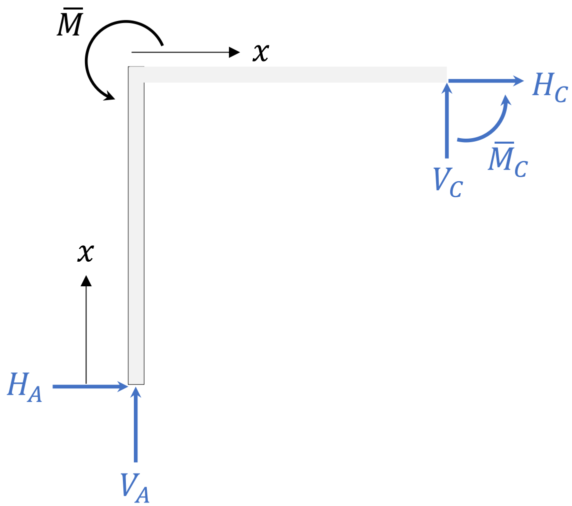
$$\Sigma M_C = 0 \;\Rightarrow H_A L - V_A L + \bar{M} + \bar{M}_C = 0$$

- *Incógnitas hiperestáticas independentes:*

H_A

V_A

- *Princípio da Energia Complementar Mínima:*



$$\frac{\partial U^*}{\partial H_A} = 0 \Rightarrow \int_0^L M_1(x)\frac{\partial M_1}{\partial H_A}dx + \int_0^L M_2(x)\frac{\partial M_2}{\partial H_A}dx = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_A} = 0 \Rightarrow \int_0^L M_1(x)\frac{\partial M_1}{\partial V_A}dx + \int_0^L M_2(x)\frac{\partial M_2}{\partial V_A}dx = 0$$

$$M_1(x) = -H_A x \qquad \frac{\partial M_1}{\partial H_A} = -x \qquad \frac{\partial M_1}{\partial V_A} = 0$$

$$M_2(x) = -H_A L - \bar{M} + V_A x \qquad \frac{\partial M_2}{\partial H_A} = -L \qquad \frac{\partial M_2}{\partial V_A} = x$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial H_A} = 0 \Rightarrow 8H_A L - 3V_A L = -6\bar{M}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_A} = 0 \Rightarrow 3H_A L - 2V_A L = -3\bar{M}$$

$$\Rightarrow H_A = -\frac{3\bar{M}}{7L} \quad \Rightarrow V_A = \frac{6\bar{M}}{7L}$$

- *As outras incógnitas vinculares são calculadas a partir das equações de equilíbrio:*

$$H_C = \frac{3\bar{M}}{7L} \qquad V_C = -\frac{6\bar{M}}{7L} \qquad \bar{M}_C = \frac{2\bar{M}}{7}$$

- *Cálculo da rotação:*

$$\theta = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}}$$

$$\theta = \frac{1}{EI}\int_0^L M_1(x)\frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}}dx + \frac{1}{EI}\int_0^L M_2(x)\frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}}\,dx$$

$$M_1(x) = \frac{3\bar{M}}{7L}x \qquad \frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} = \frac{3x}{7L}$$

$$M_2(x) = -\frac{4\bar{M}}{7} + \frac{6\bar{M}}{7L}x \qquad \frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} = -\frac{4}{7} + \frac{6x}{7L}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\bar{M}L}{7EI}$$

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar.* Disponível no Moodle