EESC • USP

SEL0302-5 – Circuitos Elétricos II

Convolução

Professor: Mário Oleskovicz

Monitor PAE: Moisés Jr. B. B. Davi

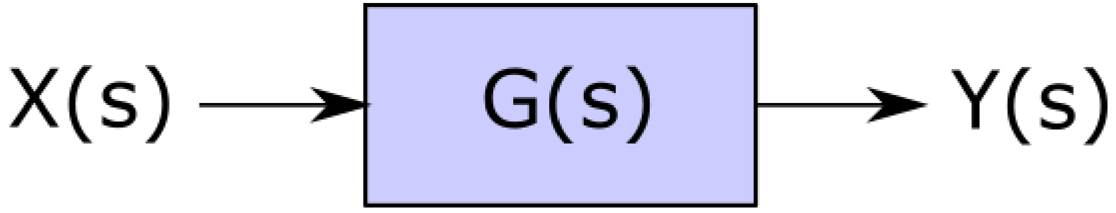
Cronograma

- O que é e como é útil a Convolução?
- Resposta ao Impulso
- A Integral de Convolução
- Convolução em Sistemas Realizáveis
- Método Gráfico de Convolução
- Propriedades do Operador de Convolução
- Convolução e Transformada Laplace

O que é Convolução?

- A convolução é uma ferramenta valiosa para o engenheiro eletricista, pois fornece um meio para caracterizar sistemas físicos/experimentais para os quais um mapeamento completo seja muito trabalhoso!

- As técnicas aprendidas para análises de circuitos no domínio de "s" são extremamente úteis para a definição de circuitos particulares.

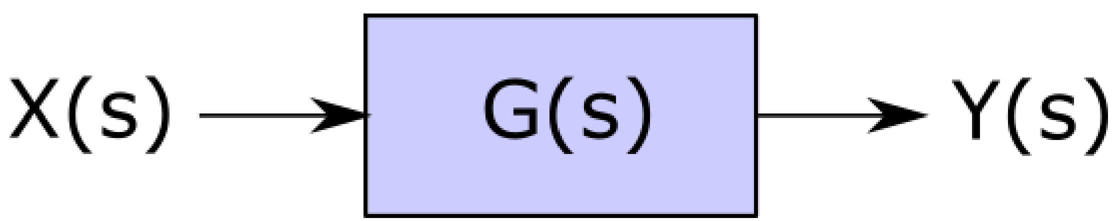


O que é Convolução?

- Mas como encontrar a resposta da saída quando o meu sistema G(s) não pode ser mapeado???

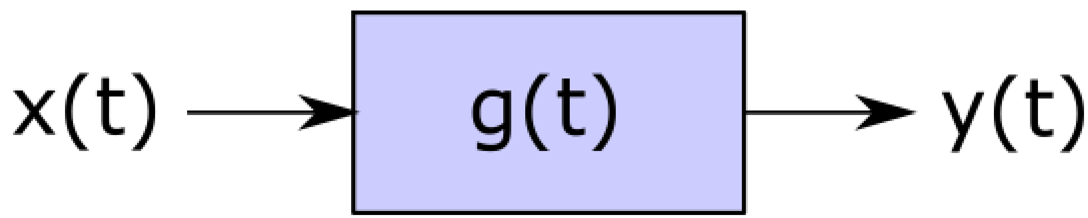
- E se estiverem disponíveis apenas os dados experimentais de nossa entrada (não temos X(s) mapeado ou uma função x(t) definida)???

- **Convolução pode nos ajudar!!!**



O que é Convolução?

- Primeiro critério é que devemos ter um **Circuito Linear Invariante no Tempo (LIT)**!!

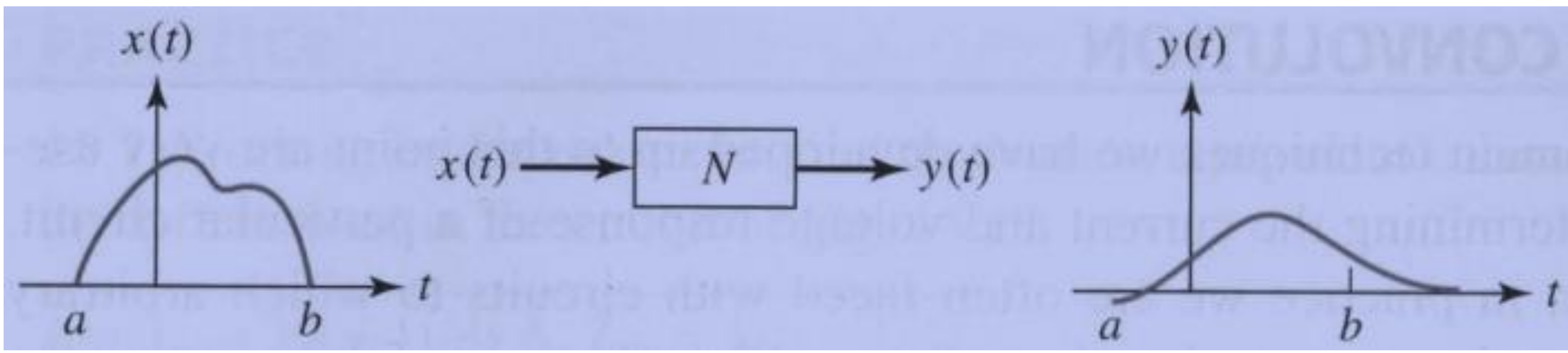


- Nesses casos a convolução nos permite descobrir a resposta y(t) de um sistema a uma excitação x(t), conhecendo-se apenas a resposta ao impulso do sistema (h(t));

- Ela nos permite trabalhar inteiramente no domínio do tempo, e isso pode ser útil em situações nas quais x(t) e h(t) são conhecidas apenas por meio de dados experimentais.

Resposta ao Impulso

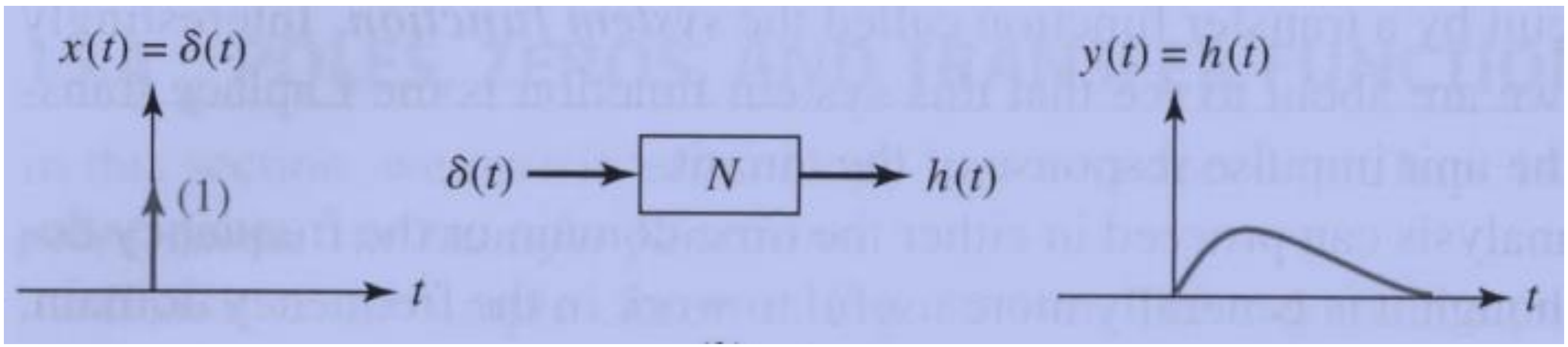
- Para o sistema abaixo:
  - Conhecendo apenas o comportamento de x(t), como podemos descrever y(t)???



- **Resposta:** temos que ter algum conhecimento sobre N!!

Resposta ao Impulso

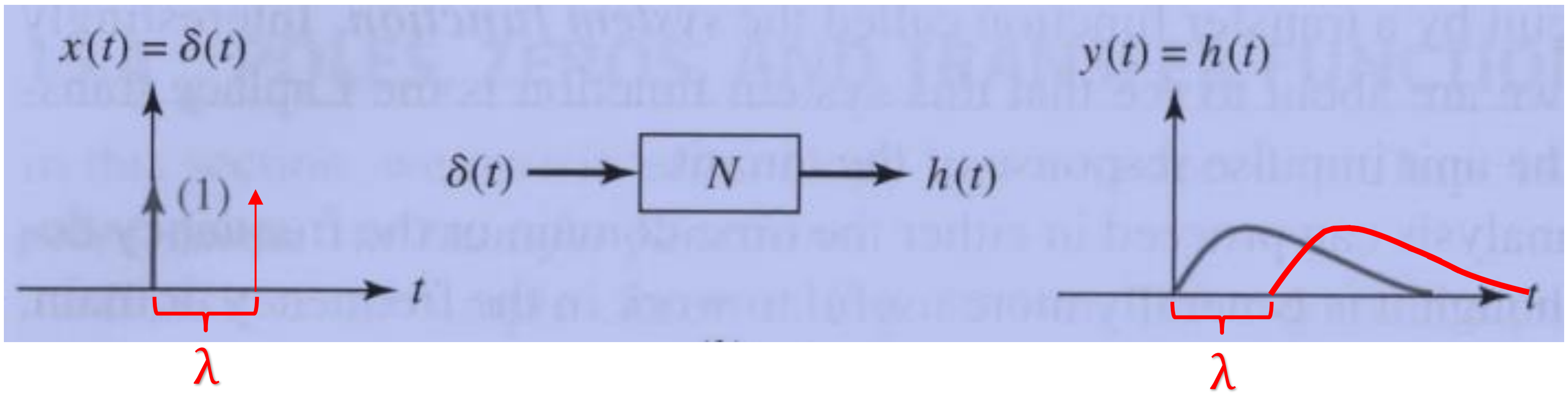
- Vamos supor então, que conhecemos a resposta de N a um impulso unitário, aplicado no instante t = 0 s!!



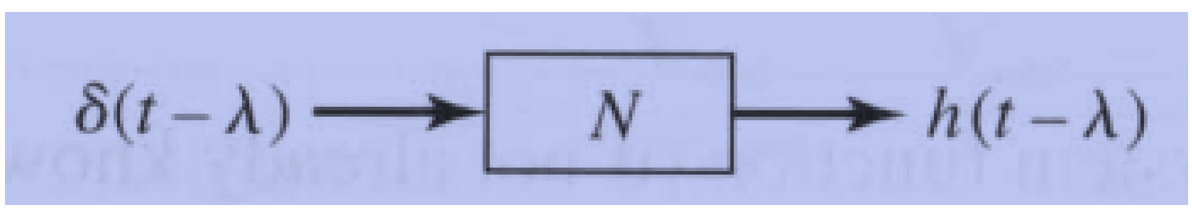
- Essa resposta ao impulso é representada usualmente por h(t).

Como h(t) pode ser útil na caracterização de N?

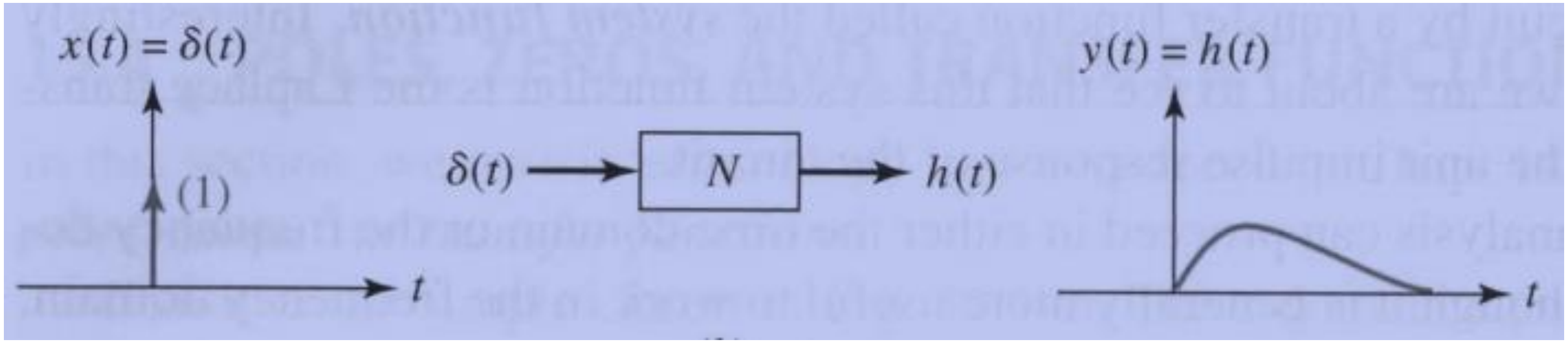
Resposta ao Impulso



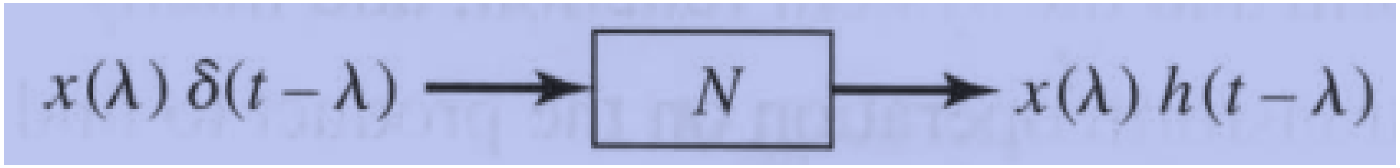
- Se alterarmos o tempo do impulso para t = λ, podemos perceber que a única alteração da saída será um atraso de tempo!



Resposta ao Impulso

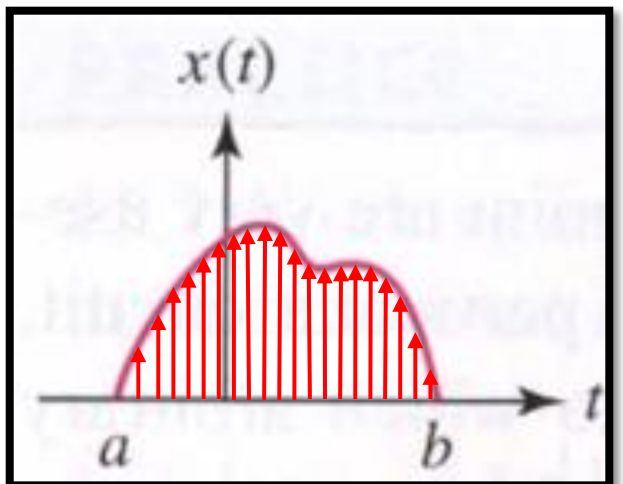


- Se alterarmos a força do impulso por uma constante x(λ), ou seja, x(λ)δ(t- λ) na entrada, teremos x(λ)h(t- λ) na saída!



Resposta ao Impulso

- O interessante, é que nós conseguimos representar qualquer sinal de entrada x(t), como uma composição de impulsos de diferentes magnitudes aplicados em diferentes instantes!
- Ou seja:



$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)\, d\lambda$$

Resposta ao Impulso

- Sabendo que:

$$x(\lambda)\,\delta(t-\lambda) \longrightarrow \boxed{N} \longrightarrow x(\lambda)\,h(t-\lambda)$$

- E sabendo que:

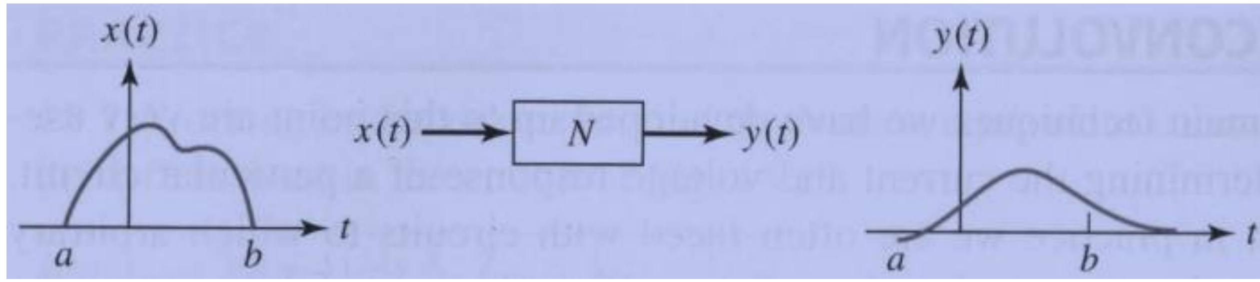
$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)\,d\lambda}$$

- A saída y(t) para qualquer entrada x(t), pode ser representada por:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda} \longrightarrow \boxed{N} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda$$

Resposta ao Impulso

- Ou seja:



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\, d\lambda$$

- Assim conseguimos representar a saída de qualquer sistema LIT, para qualquer sinal de entrada **x(t)**, utilizando apenas a resposta ao impulso **h(t)** do sistema!!!

A Integral de Convolução

- Essa é a importante relação, conhecida como:

Integral de Convolução!!!

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = \boxed{x(t) * h(t)}$$

Onde * representa a Convolução de x(t) e h(t)!

NÃO CONFUNDIR COM MULTIPLICAÇÃO!

A Integral de Convolução

- Por definição, podemos ainda representar essa integral de uma segunda maneira:
  - Posso fixar a função x no tempo e variar a função h;
  - Fixar h no tempo e variar a função x.

$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * h(t) =}$$

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda}$$

Convolução em Sistemas Realizáveis

- As integrais mostradas anteriormente expressam a relação mais geral de convolução entre duas funções.
- Todavia, em nossas aplicações (sistemas reais) podemos alterar o limite inferior para zero e o superior para t.
- Com isso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{0}^{t} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{0}^{t} x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda$$

A Integral de Convolução

- Exemplo 1 - Suponha **x(t) = tu(t)** e **h(t) = t²u(t). Encontre y(t)** e comprove que as duas formas de escrita da integral de convolução são, de fato, equivalentes:

$$\boldsymbol{y(t)} = \boxed{\int_0^t x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda} = \int_0^t x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda$$

$$x(\lambda) = \lambda \;\; e \; h(t-\lambda) = (t-\lambda)^2$$

$$\int_0^t \lambda(t-\lambda)^2\, d\lambda = \int_0^t \lambda(t^2 - 2t\lambda + \lambda^2)\, d\lambda$$

$$\int_0^t (\lambda t^2 - 2t\lambda^2 + \lambda^3)\, d\lambda =$$

$$\left(\frac{\lambda^2 t^2}{2} - \frac{2t\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right)^{(0 \to t)} =$$

$$\frac{t^4}{2} - \frac{2t^4}{3} + \frac{t^4}{4} =$$

$$\frac{6t^4 - 8t^4 + 3t^4}{12} = \boxed{\frac{t^4}{12}}$$

A Integral de Convolução

- Exemplo 1 - Suponha **x(t) = tu(t)** e **h(t) = t²u(t). Encontre y(t)** e comprove que as duas formas de escrita da integral de convolução são, de fato, equivalentes:

$$\boldsymbol{y(t) = \int_0^t x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = \boxed{\int_0^t x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda}}$$

$$\boldsymbol{x(t-\lambda) = t - \lambda \; e \; h(\lambda) = \lambda^2}$$

$$\boldsymbol{\int_0^t (t-\lambda)\lambda^2\, d\lambda = \int_0^t (\lambda^2 t - \lambda^3)\, d\lambda}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{\lambda^3 t}{3} - \frac{\lambda^4}{4}\right)^{(0\,\rightarrow t)} =}$$

$$\boldsymbol{\frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{4t^4 - 3t^4}{12} = \boxed{\frac{t^4}{12}}}$$

A Integral de Convolução

- Exemplo 2 – Seja **f1(t) =** $e^{-5t}u(t)$ e **f2(t) =** $(1 - e^{-2t})u(t)$, encontre **y(t) = f1(t) * f2(t)**:

$$\int_0^t f1(t-\lambda)\, f2(\lambda)\, d\lambda$$

$$f1(t-\lambda) = e^{-5(t-\lambda)} \text{ e } f2(\lambda) = 1 - e^{-2\lambda}$$

$$\int_0^t e^{-5(t-\lambda)}(1 - e^{-2\lambda})d\lambda$$

$$\boxed{= \frac{1}{5} - \frac{e^{-2t}}{3} + \frac{2e^{-5t}}{15}}$$

Método Gráfico de Convolução

- Para certas aplicações, onde as funções que definem a entrada x(t) ou a resposta ao impulso h(t) do sistema são definidas experimentalmente, solucionar a integral de convolução de forma analítica pode ser uma tarefa mais trabalhosa!

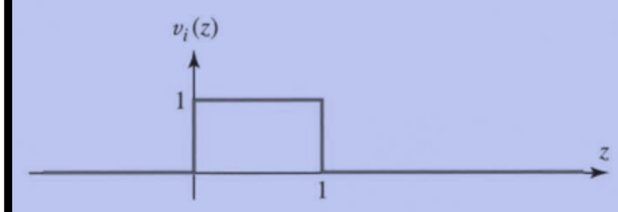
$$\int_0^t x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda$$

- Para facilitar a operação de convolução nestes casos, podemos utilizar um recurso chamado **Método Gráfico de Convolução**!

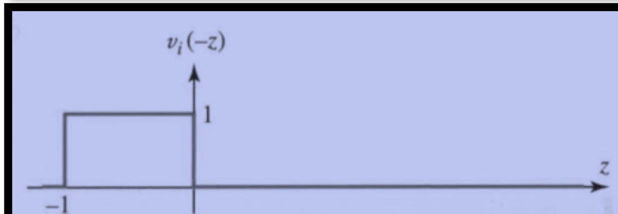
Método Gráfico de Convolução

- A integral que devemos resolver é a seguinte:

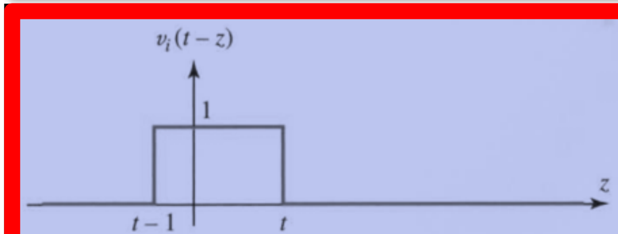
$$\int_0^{\infty} v_i(t-z)h(z)\,dz$$



(a)

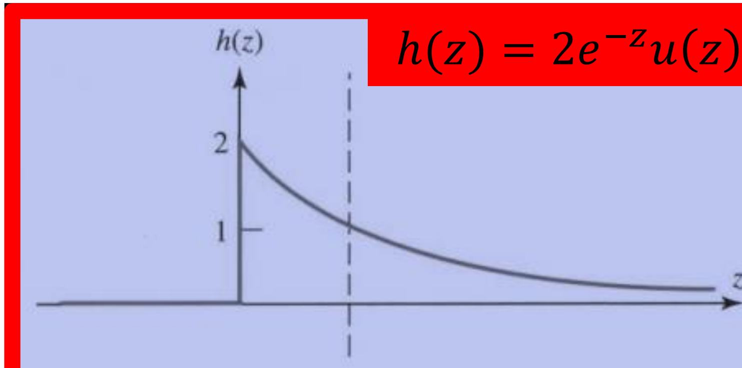


(b)



(c)

$h(z) = 2e^{-z}u(z)$

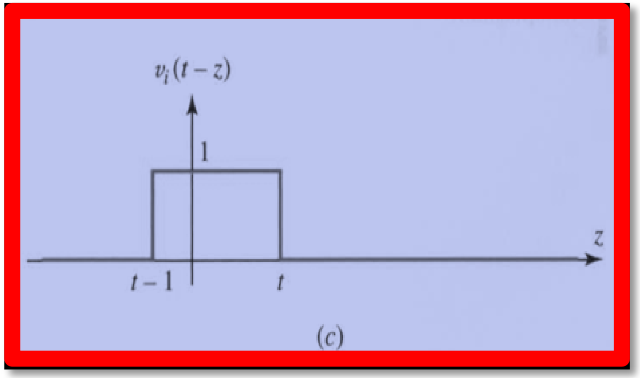


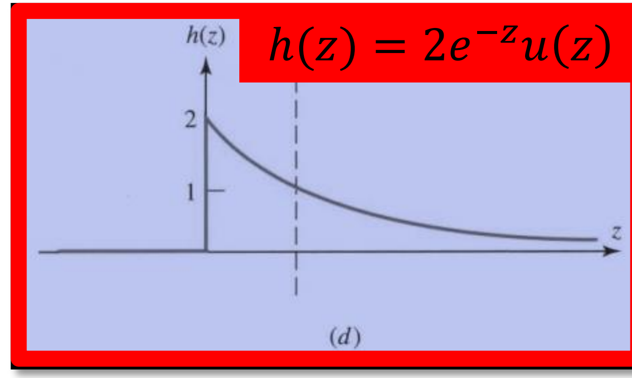
(d)

Após encontrar as funções h(z) e vi(t-z), devemos multiplicá-las, ponto a ponto, e integrar o produto, considerando t de -∞ a +∞

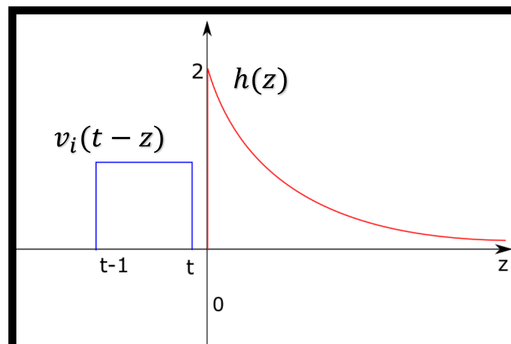
Método Gráfico de Convolução

- Primeiro, vamos considerar t < 0:





Para t < 0:

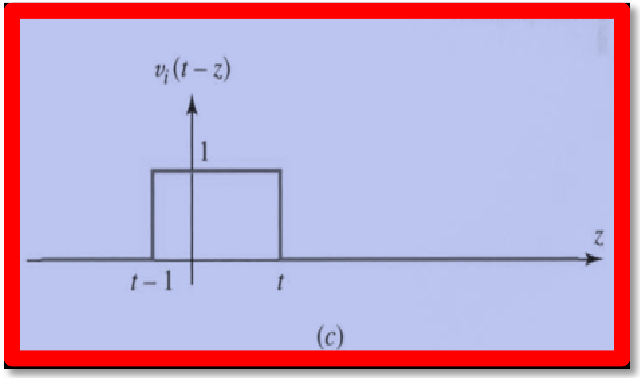


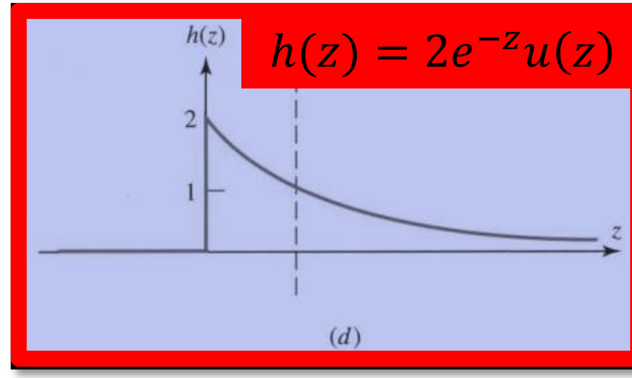
$$\int_0^\infty v_i(t-z)h(z)\,dz$$

Considerando t < 0, não há qualquer intersecção entre as duas Funções, ou seja, a multiplicação de ambas será igual a zero!

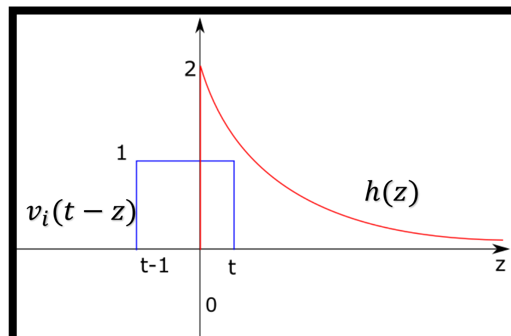
Método Gráfico de Convolução

- Primeiro, vamos considerar 0 <= t <= 1:





Para 0 <= t <= 1:

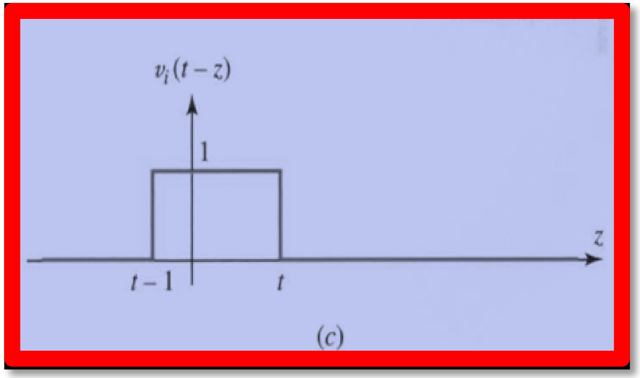


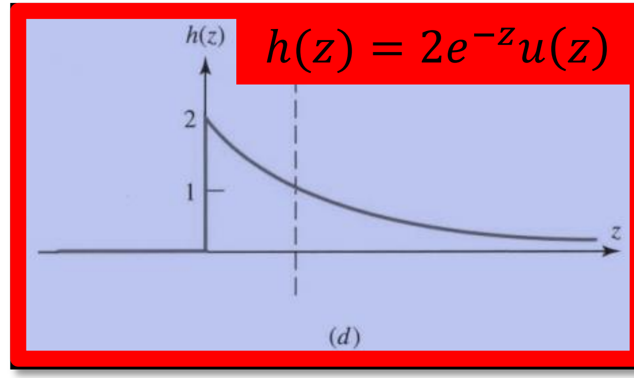
$$\int_0^{\infty} v_i(t-z)h(z)\,dz$$

Neste caso, a multiplicação de ambos os sinais, ponto a ponto pode ser definida como: $\int_0^t 2e^{-z}dz = 2 - 2e^{-t}$

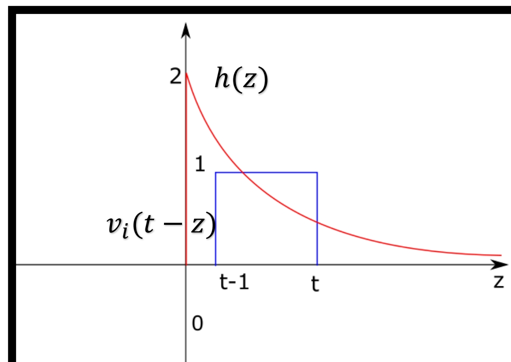
Método Gráfico de Convolução

- Primeiro, vamos considerar t > 1:





Para t > 1:



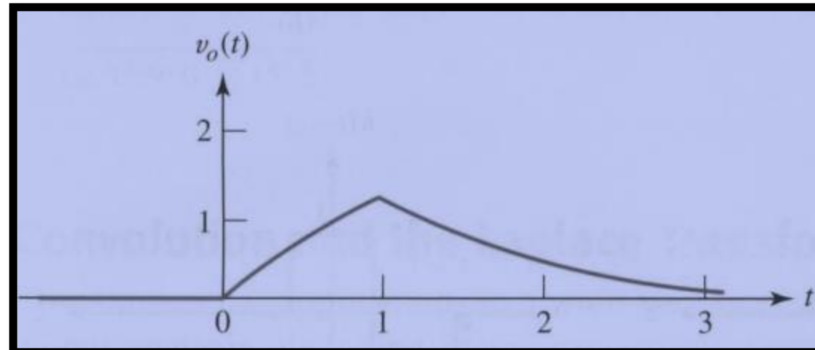
$$\int_0^\infty v_i(t-z)h(z)\,dz$$

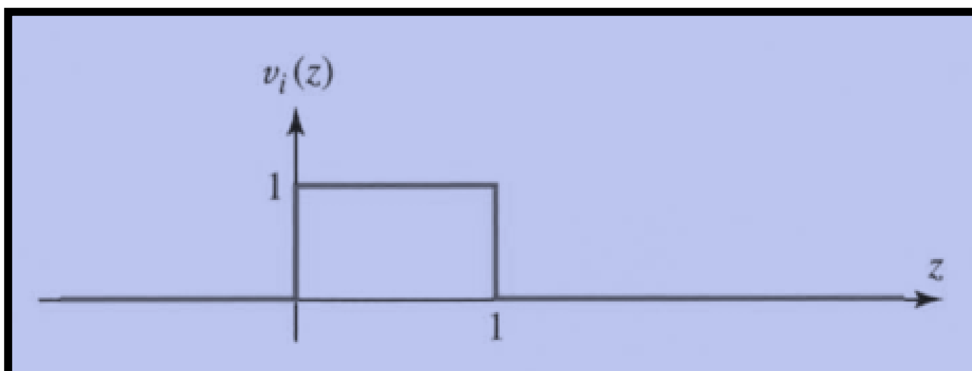
Neste caso, a multiplicação de ambos os sinais, ponto a ponto pode ser definida como: $\int_{t-1}^{t} 2e^{-z}dz = -2e^{-t} + 2e^{1-t}$

Método Gráfico de Convolução

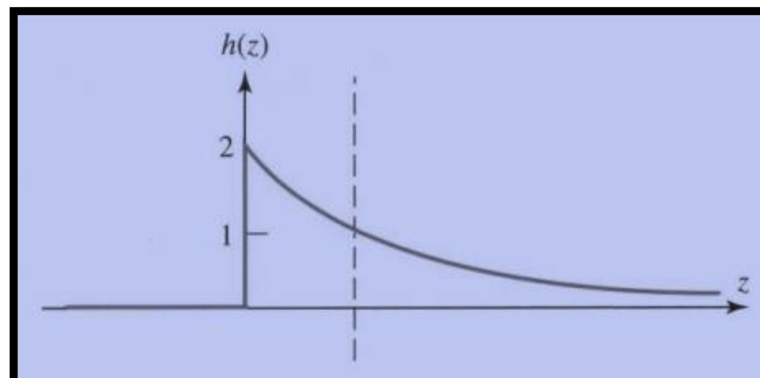
- Logo, nossa resposta $v_0(t)$ pode ser definida como:

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t 2e^{-z}\,dz = 2(1 - e^{-t}) & 0 \le t \le 1 \\ \displaystyle\int_{t-1}^t 2e^{-z}\,dz = 2(e - 1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$





(a)

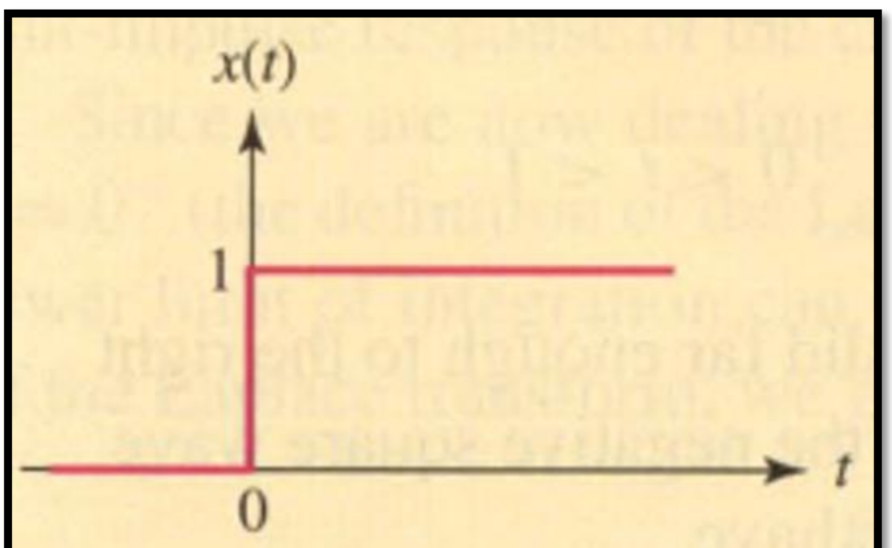


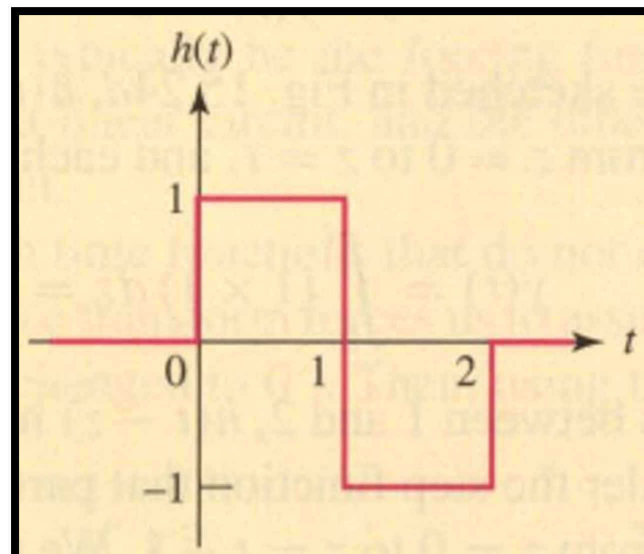
(d)

Método Gráfico de Convolução

- Exemplo 2: Considere a entrada de um sistema representada pela função x(t) = u(t). A resposta ao impulso desse sistema é h(t) = u(t) – 2u(t-1) + u(t-2). Determine qual a saída y(t) desse sistema.

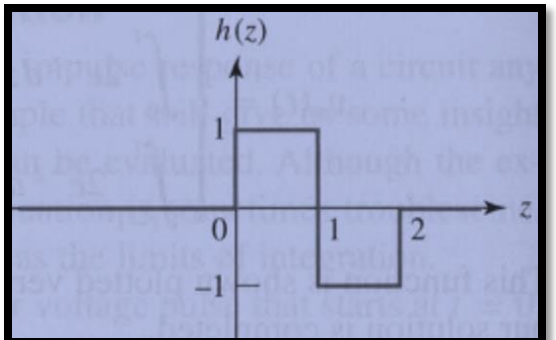
$$y(t) = \int_{0}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = x(t) * h(t)$$

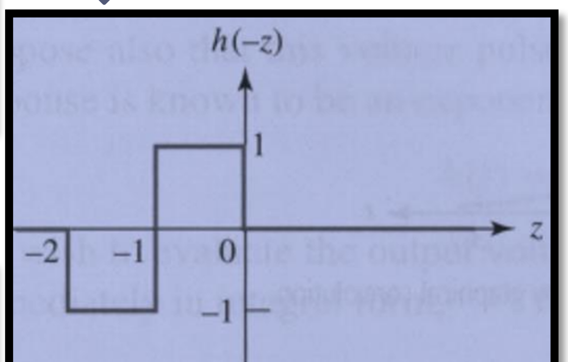


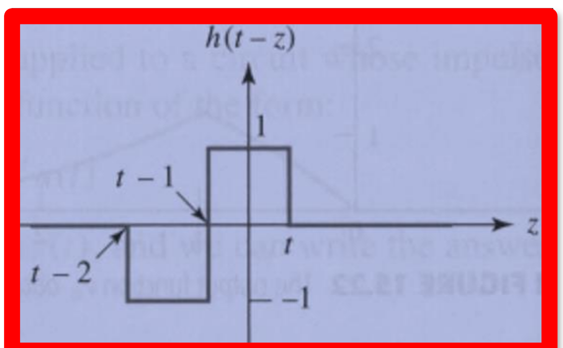


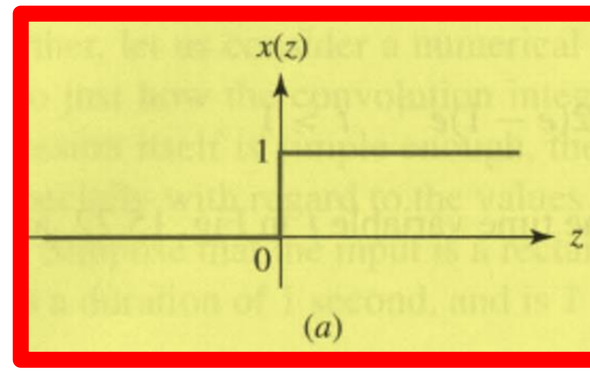
Método Gráfico de Convolução

- A integral que devemos resolver é a seguinte: $\int_0^{\infty} x(z)\, h(t-z)\, dz$







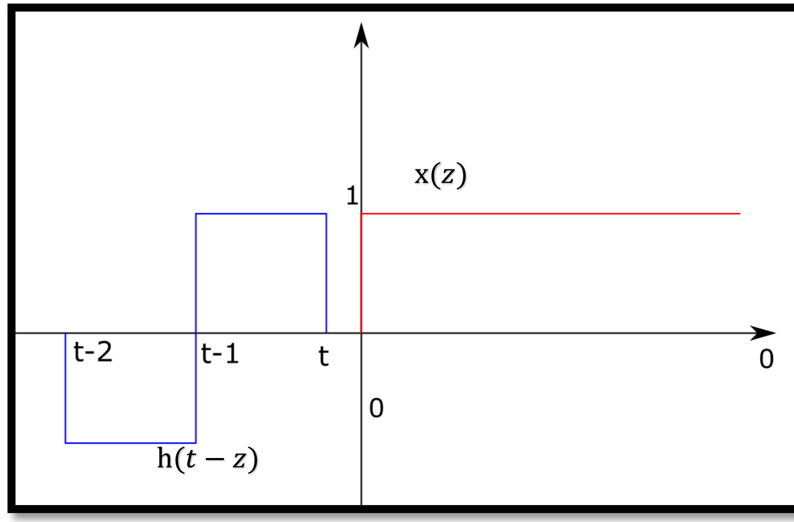


Agora devemos multiplicar ambas as funções para diferentes intervalos de t

Método Gráfico de Convolução

- Primeiro, vamos considerar t < 0:

Para t < 0:

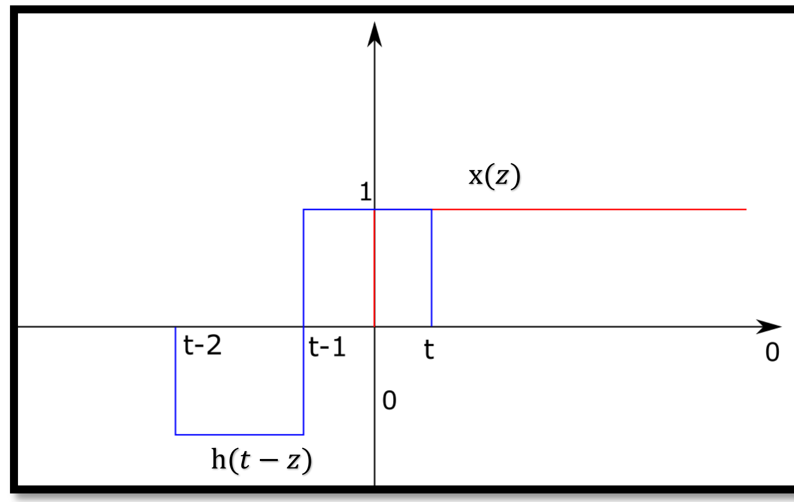


Considerando t < 0, não há qualquer intersecção entre as duas Funções, ou seja, a multiplicação de ambas será igual a zero!

Método Gráfico de Convolução

- Primeiro, vamos considerar 0 <= t <= 1:

Para 0 <= t <= 1:

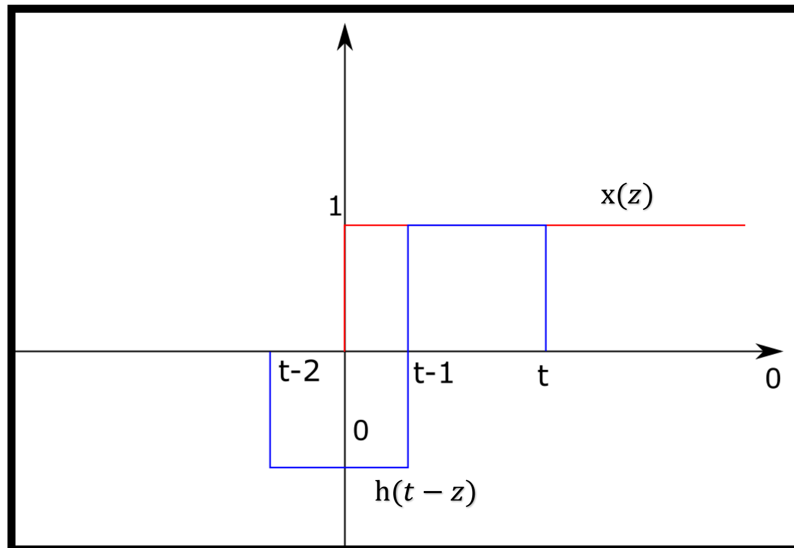


Neste caso, a multiplicação de ambos os sinais, ponto a ponto pode ser definida como: $\int_0^t 1\,dz = t$

Método Gráfico de Convolução

- Primeiro, vamos considerar 1 <= t <= 2:

Para 1 <= t <= 2:

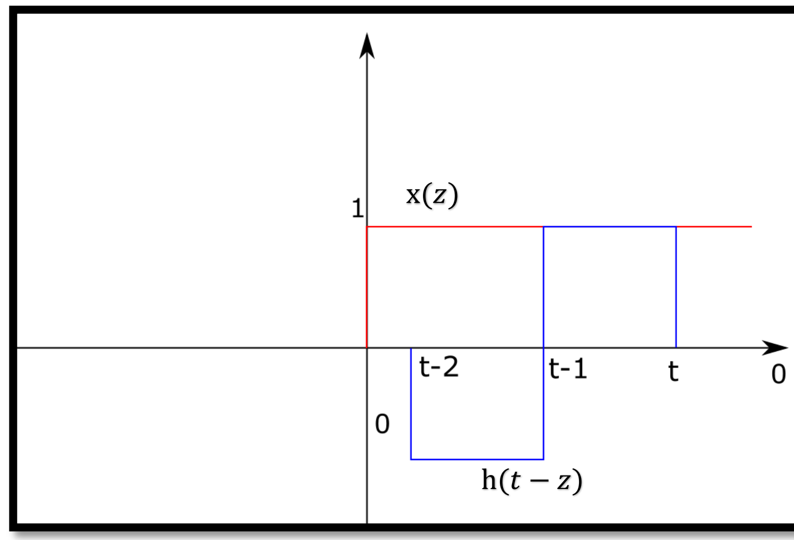


Neste caso, a multiplicação de ambos os sinais, ponto a ponto pode ser definida como: $\int_0^{t-1}(-1)\,dz + \int_{t-1}^{t} 1\,dz = (1-t) + t\; - (t-1) = 2 - t$

Método Gráfico de Convolução

- Primeiro, vamos considerar t > 2:

Para t > 2:



Neste caso, a multiplicação de ambos os sinais, ponto a ponto pode ser definida como: $\int_{t-2}^{t-1}(-1)\,dz + \int_{t-1}^{t} 1\,dz = (1-t) - (2-t) + t - (t-1) = 0$

Método Gráfico de Convolução

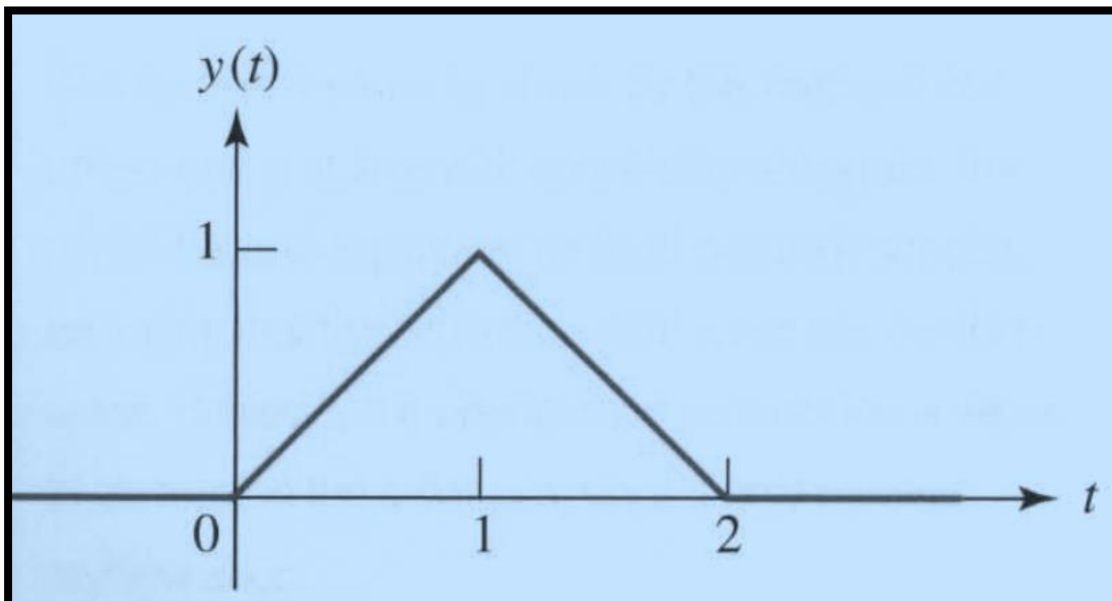
- Logo, nossa resposta $y(t)$ pode ser definida como:

Para t < 0 → y(t) = 0

Para 0 <= t <= 1 → y(t) = t

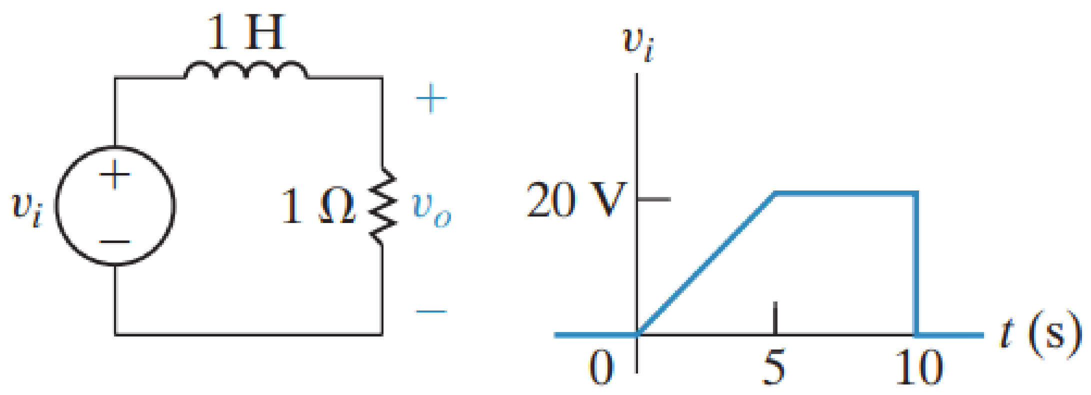
Para 1 <= t <= 2 → y(t) = 2-t

Para t > 2 → y(t) = 0



Exercícios – Etapa 1

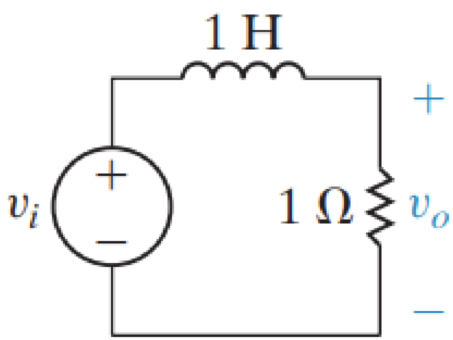
- Determine v_0 utilizando os conceitos aprendidos sobre convolução.



1. Tenho a entrada;
2. Descubro a resposta ao impulso para o circuito;
3. Realizo a convolução entre o sinal de entrada e a resposta ao impulso.

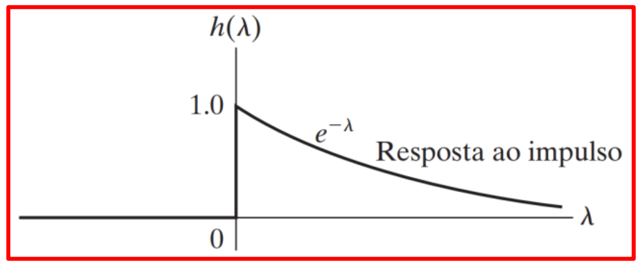
Exercícios – Etapa 1

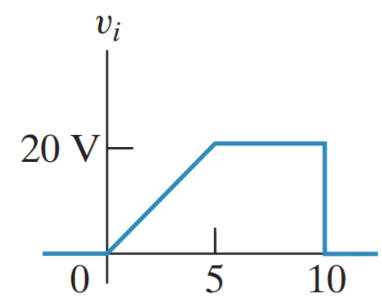
- Descobrindo a resposta ao impulso do circuito.



$$\int_0^t v_i(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda$$

$$V_o = \frac{V_i}{s+1}(1).$$



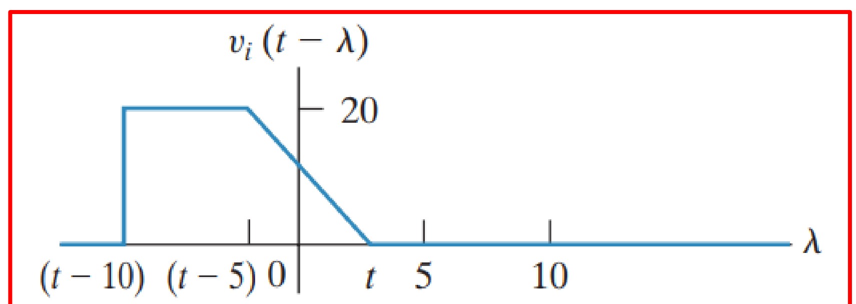


Quando v_i é um impulso unitário $\delta(t)$,

$$v_o = h(t) = e^{-t}u(t),$$

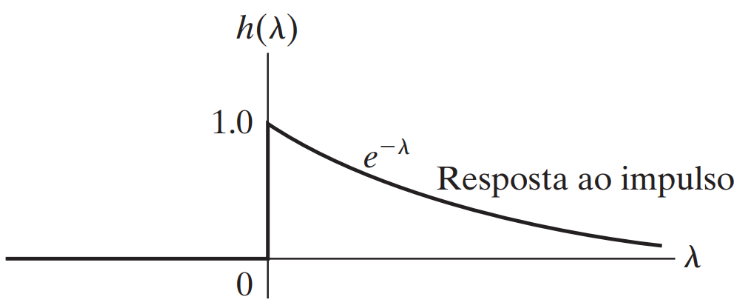
em que

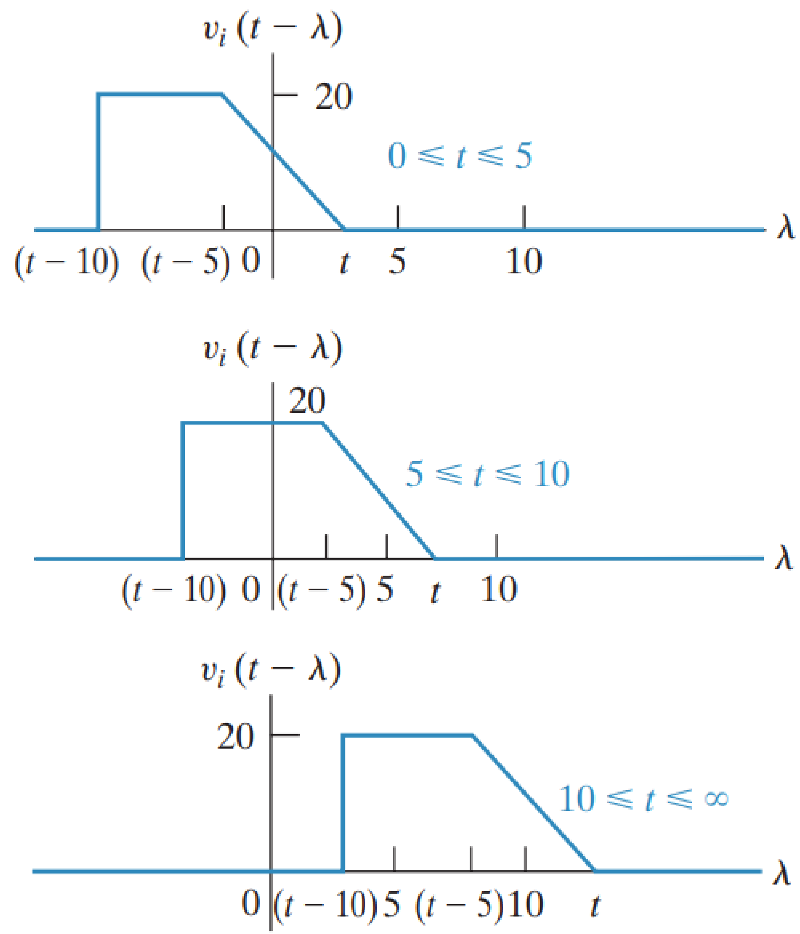
$$h(\lambda) = e^{-\lambda}u(\lambda).$$



Exercícios – Etapa 1

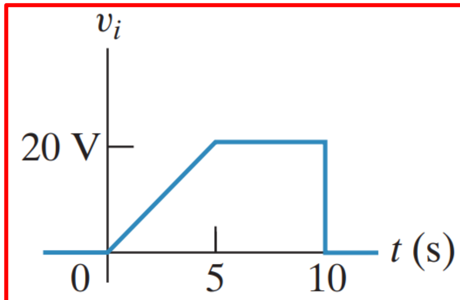
- Intervalos de intersecção entre os sinais.



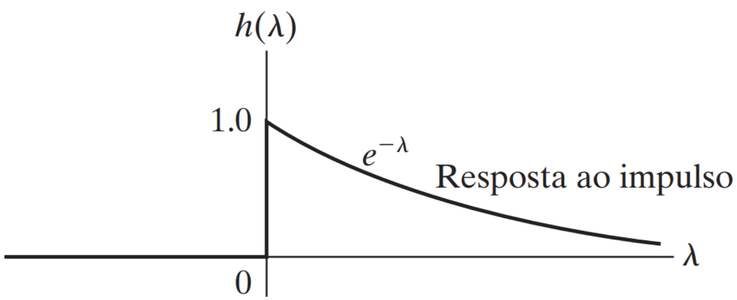


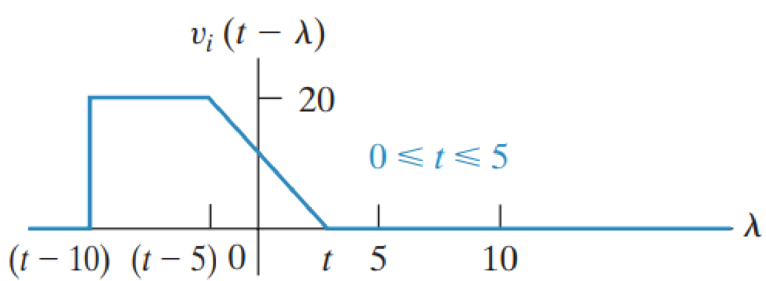
Exercícios – Etapa 1

- Intervalos de intersecção entre os sinais.



$$v_i(t) = 4t;\ com\ t\ entre\ 0\ e\ 5\ seg.$$





$$\boxed{\int_0^t v_i(t-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda}$$

$$\int_0^t 4(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda =$$

$$\int_0^t 4te^{-\lambda} - \boxed{4\lambda e^{-\lambda}}\,d\lambda =$$

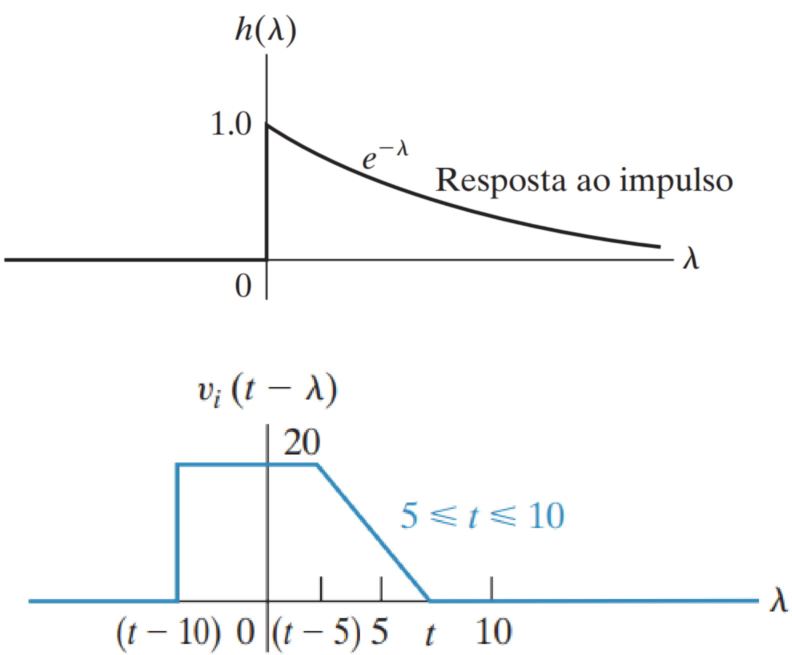
Integral por partes:
U = 4 λ → dU = 4d λ
dV = $e^{-\lambda}$ → V = $-e^{-\lambda}$

$$\left(-4te^{-\lambda} + 4\lambda e^{-\lambda} + 4e^{-\lambda}\right)^{0\to t} =$$

$$\boxed{4(e^{-t} + t - 1)V}$$

Exercícios – Etapa 1

- Intervalos de intersecção entre os sinais.



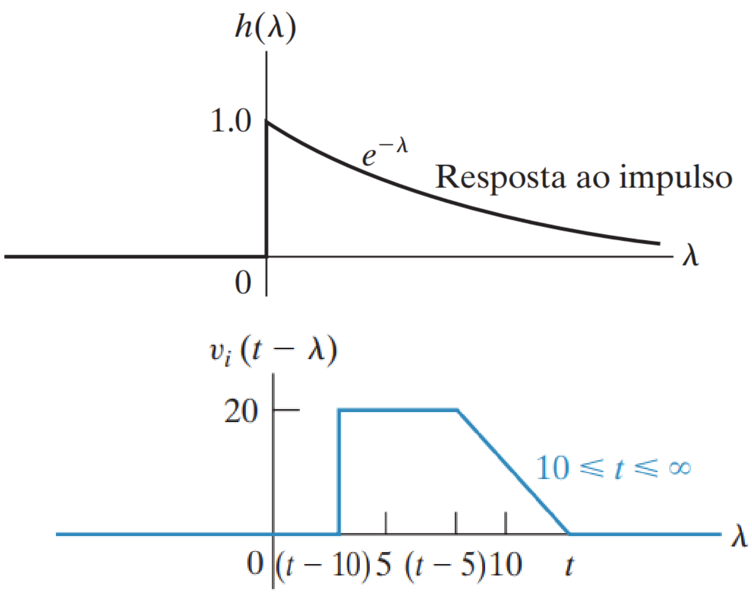
$$\boxed{\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} v_i(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\lambda})\, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\lambda})\, \boldsymbol{d\lambda}}$$

$$\int_0^{t-5} 20e^{-\lambda} d\lambda + \int_{t-5}^{t} 4(t-\lambda)e^{-\lambda} d\lambda =$$

$$\boxed{4\left(5 + e^{-t} - e^{-(t-5)}\right)V}$$

Exercícios – Etapa 1

- Intervalos de intersecção entre os sinais.



$$\boxed{\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} v_i(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\lambda})\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\lambda})\,\boldsymbol{d\lambda}}$$

$$\int_{t-10}^{t-5} 20e^{-\lambda}d\lambda + \int_{t-5}^{t} 4(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda =$$

$$\boxed{4\left(e^{-t} - e^{-(t-5)} + 5e^{-(t-10)}\right)V}$$

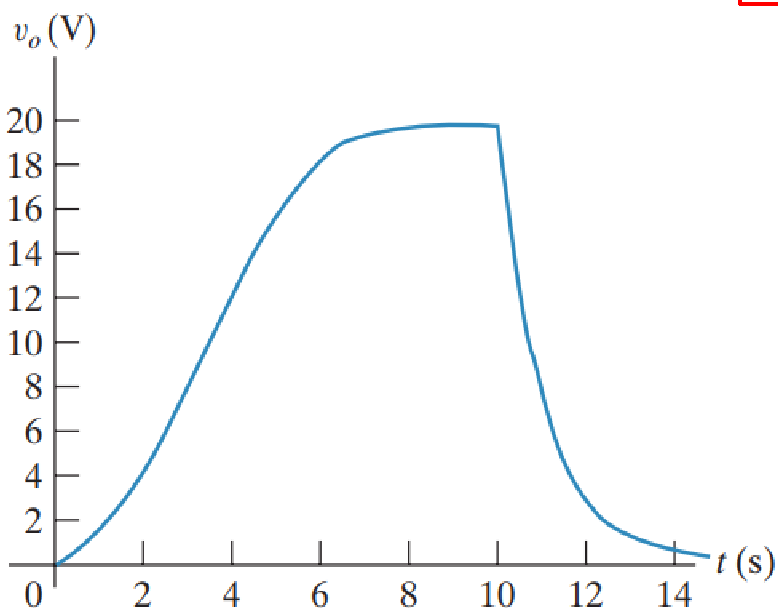
Exercícios – Etapa 1

- Utilizando as equações corretas para cada intervalo, a tensão de saída pode ser caracterizada por:

$$\boxed{4(e^{-t} + t - 1)V \ \rightarrow \mathbf{0 \le t \le 5}}$$

$$\boxed{4\left(5 + e^{-t} - e^{-(t-5)}\right)V \ \rightarrow \mathbf{5 \le t \le 10}}$$

$$\boxed{4\left(e^{-t} - e^{-(t-5)} + 5e^{-(t-10)}\right)V; \rightarrow \mathbf{10 \le t \le \infty}}$$



t	v_o	t	v_o
1	1,47	9	19,93
2	4,54	10	19,97
3	8,20	11	7,35
4	12,07	12	2,70
5	16,03	13	0,99
6	18,54	14	0,37
7	19,56	15	0,13
8	19,80		

Propriedades do Operador de Convolução

- **Comutativa:**

$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t)}$$

- **Distributiva:**

$$\boxed{f(t) * [x(t) + y(t)] = f(t) * x(t) + f(t) * y(t)}$$

- **Associativa:**

$$\boxed{f(t) * [x(t) * y(t)] = [f(t) * x(t)] * y(t)}$$

Propriedades do Operador de Convolução

- **Convolução com Função Impulso (Elemento neutro):**

$$\boxed{x(t) * \delta(t) = x(t)}$$

- **Deslocamento:**

$$\boxed{x(t) * h(t) = y(t) \rightarrow x(t) * h(t-\lambda) = y(t-\lambda)}$$

E se eu estiver no domínio de s... Como realizar a convolução entre dois sinais???

Convolução e Transformada Laplace

- Suponha duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com transformadas Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$. A convolução pode ser definida como:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t - \lambda)\, d\lambda$$

$$F(s) = \mathcal{L}[\, f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s)$$

Convolução e Transformada Laplace

- Suponha duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com transformadas Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$. A convolução pode ser definida como:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)}$$

$$F_1(s) = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \quad \Rightarrow \quad F_1(s)F_2(s) = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)[F_2(s)e^{-s\lambda}]\,d\lambda$$

$$\begin{aligned} F_2(s)e^{-s\lambda} &= \mathcal{L}[f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)] \\ &= \int_0^{\infty} f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st}\,dt \end{aligned}$$

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_0^{\infty} f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st}dt\right]d\lambda$$

Convolução e Transformada Laplace

- Suponha duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com transformadas Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$. A convolução pode ser definida como:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)}$$

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^\infty f_1(\lambda)\left[\int_0^\infty f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st}dt\right]d\lambda$$

- A integral entre colchetes se estende apenas ao intervalo de 0 a t, visto que u(t-λ) = 1 para λ < t e u(t-λ) = 0 para λ > t.

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)\,d\lambda\right]e^{-st}\,dt$$

Convolução e Transformada Laplace

- Suponha duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com transformadas Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$. A convolução pode ser definida como:

$$F_1(s)F_2(s) = \boxed{\int_0^\infty} \left[\int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, d\lambda \right] \boxed{e^{-st}\, dt}$$

$$F_1(s) = \boxed{\int_{0^-}^\infty} f_1(\lambda) \boxed{e^{-s\lambda}\, d\lambda}$$

$$\boxed{f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, d\lambda}$$

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)}$$

Convolução e Transformada Laplace

- Exemplo 1 - Suponha **x(t) = t** e **h(t) = t². Encontre y(t)** e comprove que as duas formas de escrita da integral de convolução são, de fato, equivalentes:

$$\boxed{\int_0^t x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda} = \int_0^t x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda$$

$$x(\lambda) = \lambda \;\; e \; h(t-\lambda) = (t-\lambda)^2$$

$$\int_0^t \lambda(t-\lambda)^2\, d\lambda = \int_0^t \lambda(t^2 \; - 2t\lambda + \lambda^2)\, d\lambda$$

$$\int_0^t (\lambda t^2 \; - 2t\lambda^2 + \lambda^3)\, d\lambda$$

$$\left(\frac{\lambda^2 t^2}{2} - \frac{2t\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right)^{(0 \rightarrow t)} = \frac{t^4}{2} - \frac{2t^4}{3} + \frac{t^4}{4} = \frac{6t^4 - 8t^4 + 3t^4}{12} = \boxed{\frac{t^4}{12}}$$

Convolução e Transformada Laplace

- Suponha **x(t) = t** e **h(t) = t²**, monitorados nos instantes entre 0 e t, e comprove que:
  - Resolvendo o problema no domínio de s, temos:
  - **x(t) = t → X(s) = 1/s²** e **h(t) = t² → H(s) = 2/s³**

Logo, $Y(s) = \left(\frac{1}{s^2}\right).\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{2}{s^5} \rightarrow y(t) = \frac{2t^4}{24} = \boxed{\frac{t^4}{12}}$

$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$, $(n = 1,2,3,\ldots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{w}{w^2+s^2}$	$\text{sen}(wt)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}

Convolução e Transformada Laplace

- Exemplo 2 – Seja **f1(t) =** e^{-5t} e **f2(t) =** $(1 - e^{-2t})$ e encontre **y(t) = f1(t) * f2(t)**. Utilize $\mathcal{L}^{-1}\{F1(s)F2(s)\}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f1(t-\lambda)\, f2(\lambda)\, d\lambda$$

$$f1(t-\lambda) = e^{-5(t-\lambda)}u(\lambda) \text{ e } f2(\lambda) = (1 - e^{-2\lambda})\, u(\lambda)$$

$$\int_{0}^{t} e^{-5(t-\lambda)}(1 - e^{-2\lambda})d\lambda$$

$$\boxed{= \frac{1}{5} - \frac{e^{-2t}}{3} + \frac{2e^{-5t}}{15}}$$

Convolução e Transformada Laplace

- Exercício 1: Suponha a entrada de um sistema definida por $x(t) = 4e^{-t}$ e sua resposta ao impulso representada por $\mathrm{h}(t) = 5e^{-2t}$. Qual a equação que representa a saída, no domínio do tempo???

- $X(s) = \frac{4}{s+1}; H(s) = \frac{5}{s+2}$

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

- Multiplicando tudo por (s+1), com s = -1 → A = 20
- Multiplicando tudo por (s+2), com s = -2 → B = -20

Convolução e Transformada Laplace

- Exercício 1: Suponha a entrada de um sistema $x(t) = 4e^{-t}$ e sua resposta ao impulso representada por $\mathrm{h}(t) = 5e^{-2t}$. Qual a equação que representa a saída, no domínio do tempo???

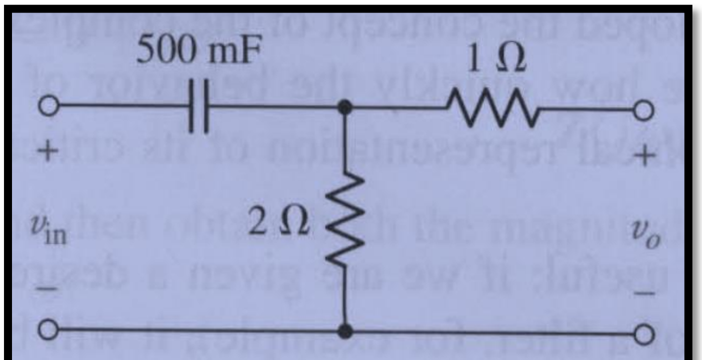
$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)} = \frac{20}{s+1} - \frac{20}{s+2}$$

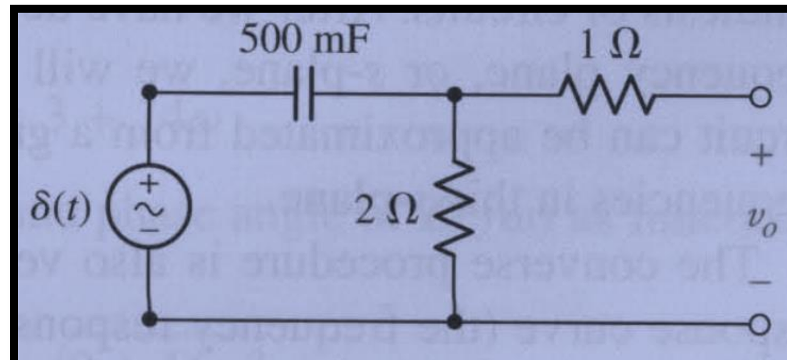
- Retornando para o domínio do tempo:

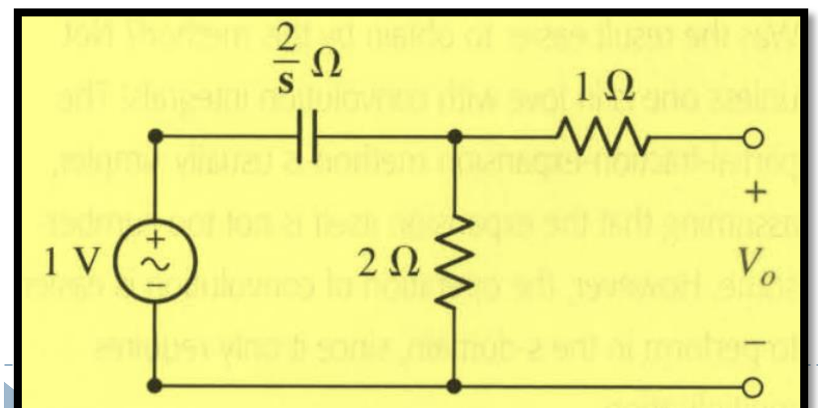
$$\boxed{y(t) = 20(e^{-t} - e^{-2t})}$$

Convolução e Transformada Laplace

- Exercício 2: Determine a resposta ao impulso do circuito abaixo, utilizando-a para computar a saída v_0 quando $v_{in} = 6e^{-2t}V$.







$$\mathbf{V}_o\Big|_{v_{in}=\partial(t)} = \frac{2}{\frac{2}{\mathbf{s}}+2} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}+1} = \mathbf{H(s)}$$

Convolução e Transformada Laplace

- Exercício 2: Determine a resposta ao impulso do circuito abaixo, utilizando-a para computar a saída $v_0(t)$ quando $v_{in}(t) = 6e^{-2t}V.$

$$\mathbf{V}_o\Big|_{v_{in}=\partial(t)} = \frac{2}{\frac{2}{\mathbf{s}}+2} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}+1} = \mathbf{H(s)}$$

$$V_{in}(s) = \frac{6}{(s+2)}$$

$$V_o(s) = \frac{6s}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

- Multiplicando tudo por (s+1), com s = -1 → A = -6
- Multiplicando tudo por (s+2), com s = -2 → B = 12

Convolução e Transformada Laplace

- Exercício 2: Determine a resposta ao impulso do circuito abaixo, utilizando-a para computar a saída $v_0(\mathrm{t})$ quando $v_{in}(t) = 6e^{-2t}V$.

$$\boldsymbol{V_o(s) = \frac{6s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-6}{s+1} + \frac{12}{s+2}}$$

- Logo,

$$\boxed{v_0(t) = -6e^{-t} + 12\, e^{-2t}\, V}$$

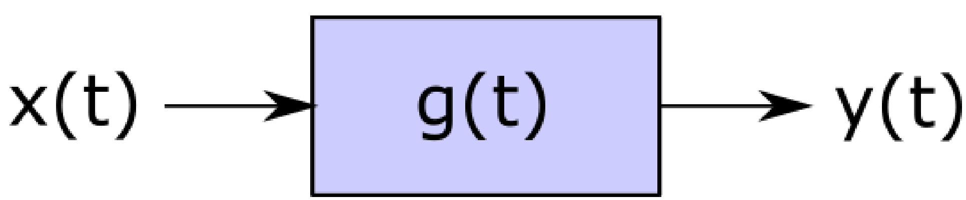
Revisão Geral

- Definição de:

Integral de Convolução!!!

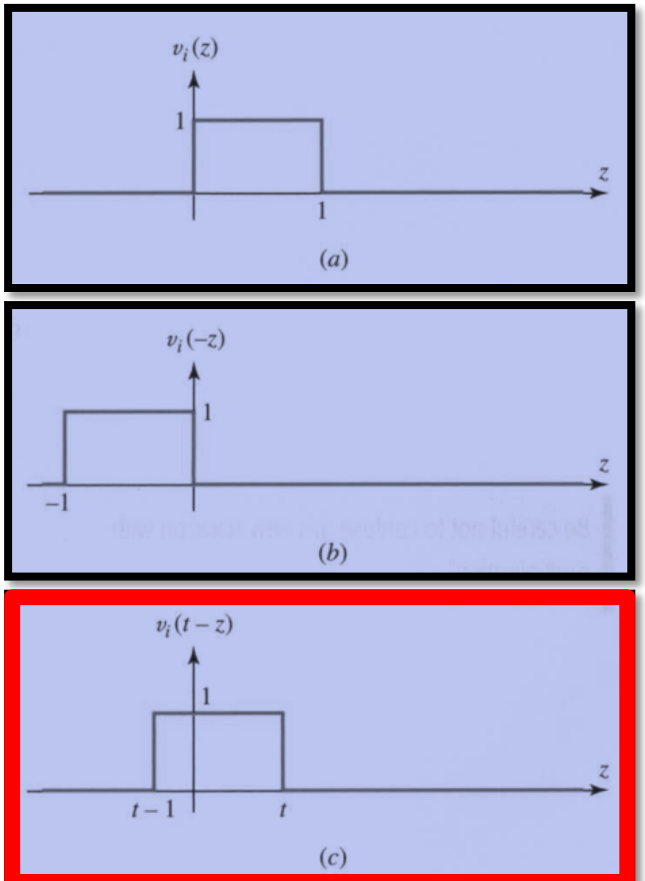
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = \boxed{x(t) \, * \, h(t)}$$

- Com ela, podemos caracterizar a saída de um sistema g(t), mediante qualquer sinal de entrada x(t), utilizando apenas sua resposta ao impulso h(t):



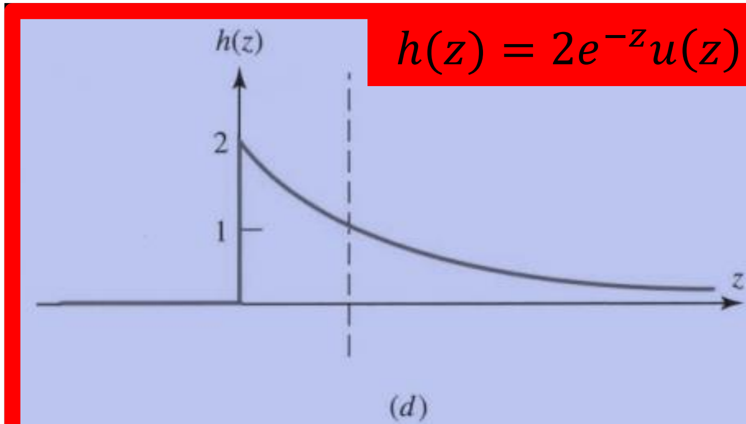
Revisão Geral

- Convolução Gráfica!!



$$\int_0^\infty v_i(t-z)h(z)\,dz$$

$$h(z) = 2e^{-z}u(z)$$



Após encontrar as funções h(z) e vi(t-z), devemos multiplicá-las, ponto a ponto, e integrar o produto, considerando t de -∞ a +∞

Revisão Geral

- **Comutativa:**

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- **Distributiva:**

$$f(t) * [x(t) + y(t)] = f(t) * x(t) + f(t) * y(t)$$

- **Associativa:**

$$f(t) * [x(t) * y(t)] = [f(t) * x(t)] * y(t)$$

- **Elemento neutro**

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- **Deslocamento**

$$x(t) * h(t) = y(t) \rightarrow x(t) * h(t - \lambda) = y(t - \lambda)$$

Revisão Geral

- Suponha duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com transformadas Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$. A convolução pode ser definida como:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t - \lambda)\, d\lambda$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s)$$

Dúvidas???

Obrigado pela atenção!

Moisés J. B. B. Davi
moisesdavi@usp.br