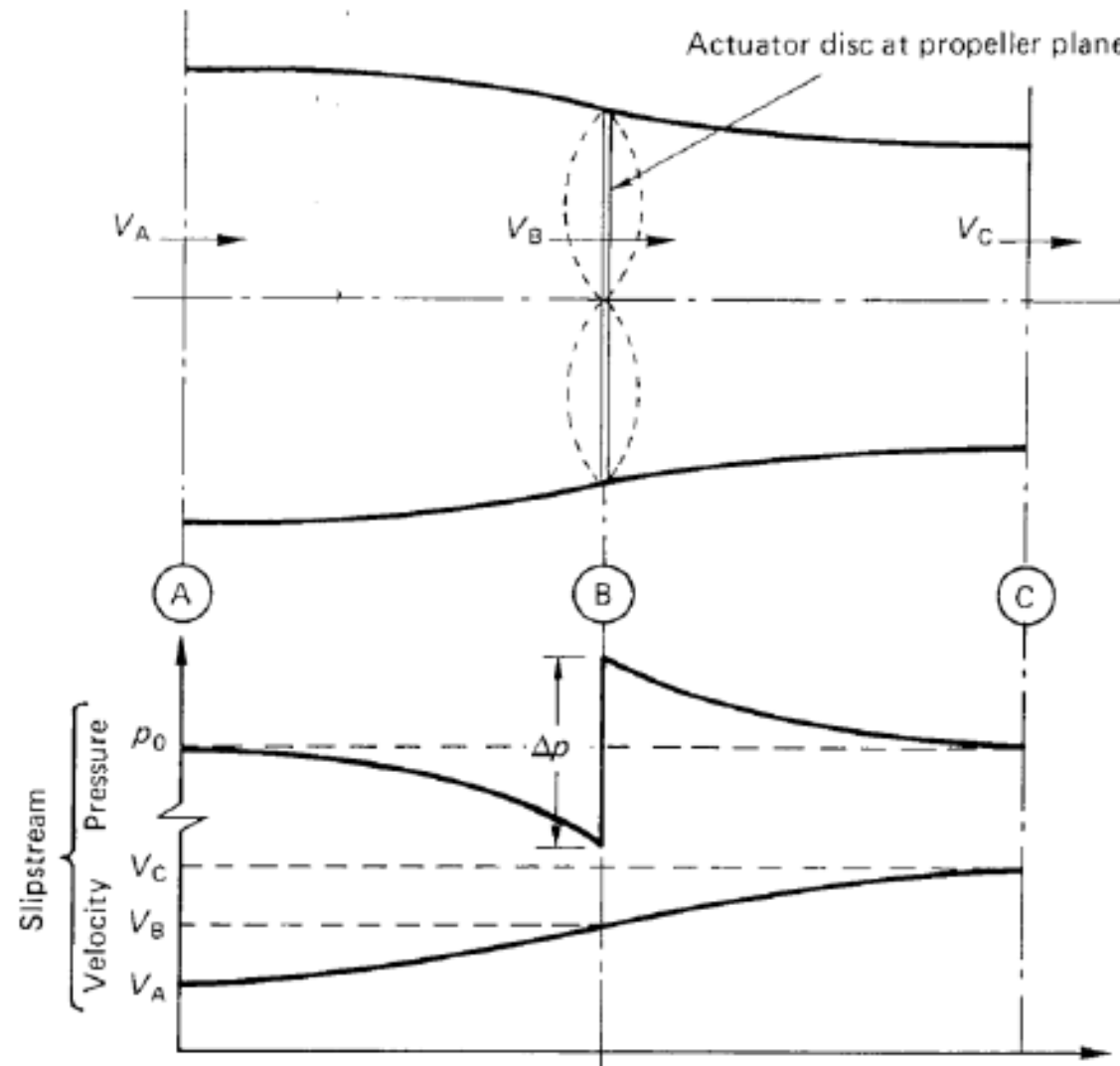


Hidrodinâmica I

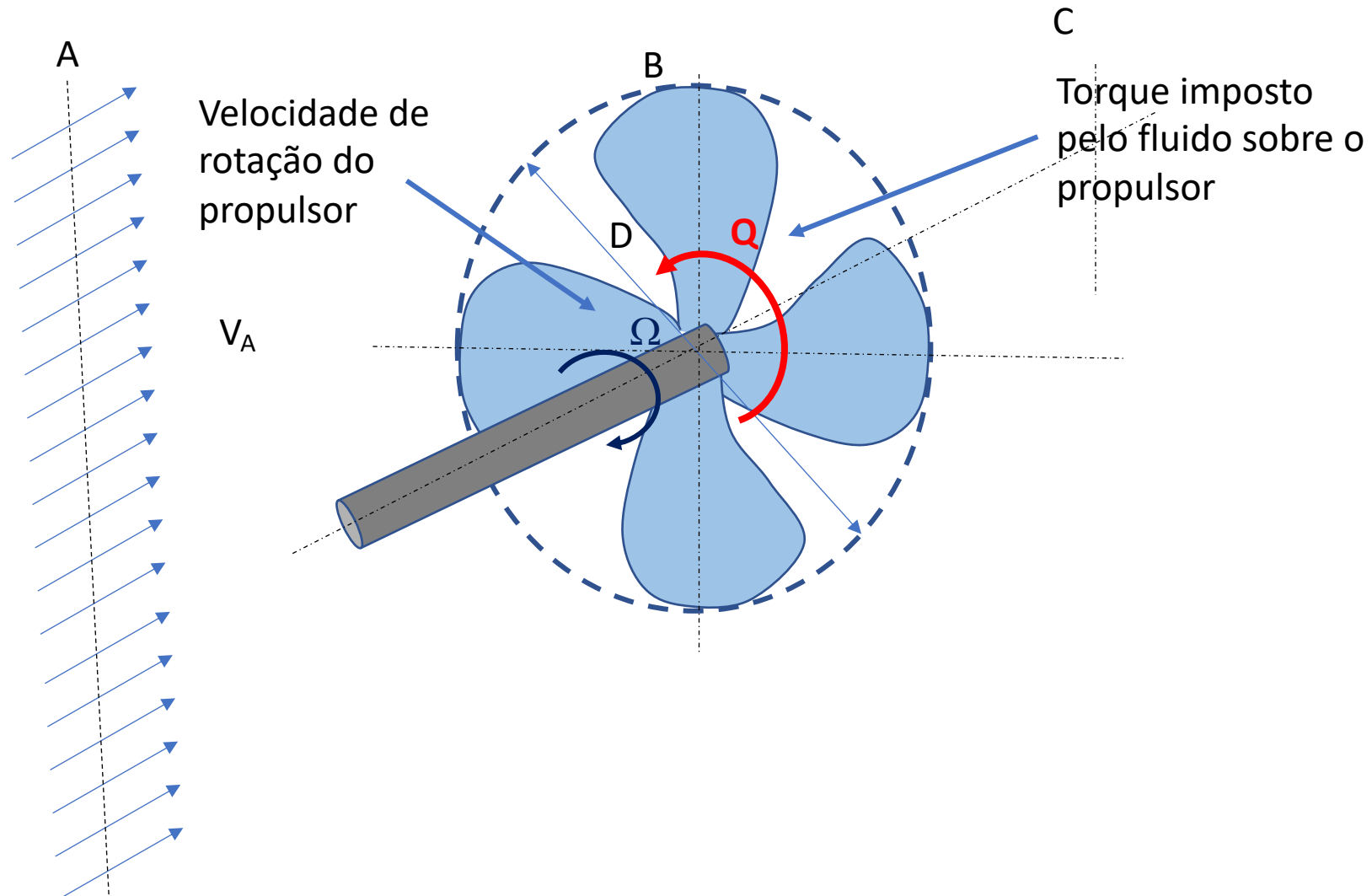
Teoria do disco atuador: Qtde. de movimento axial e angular



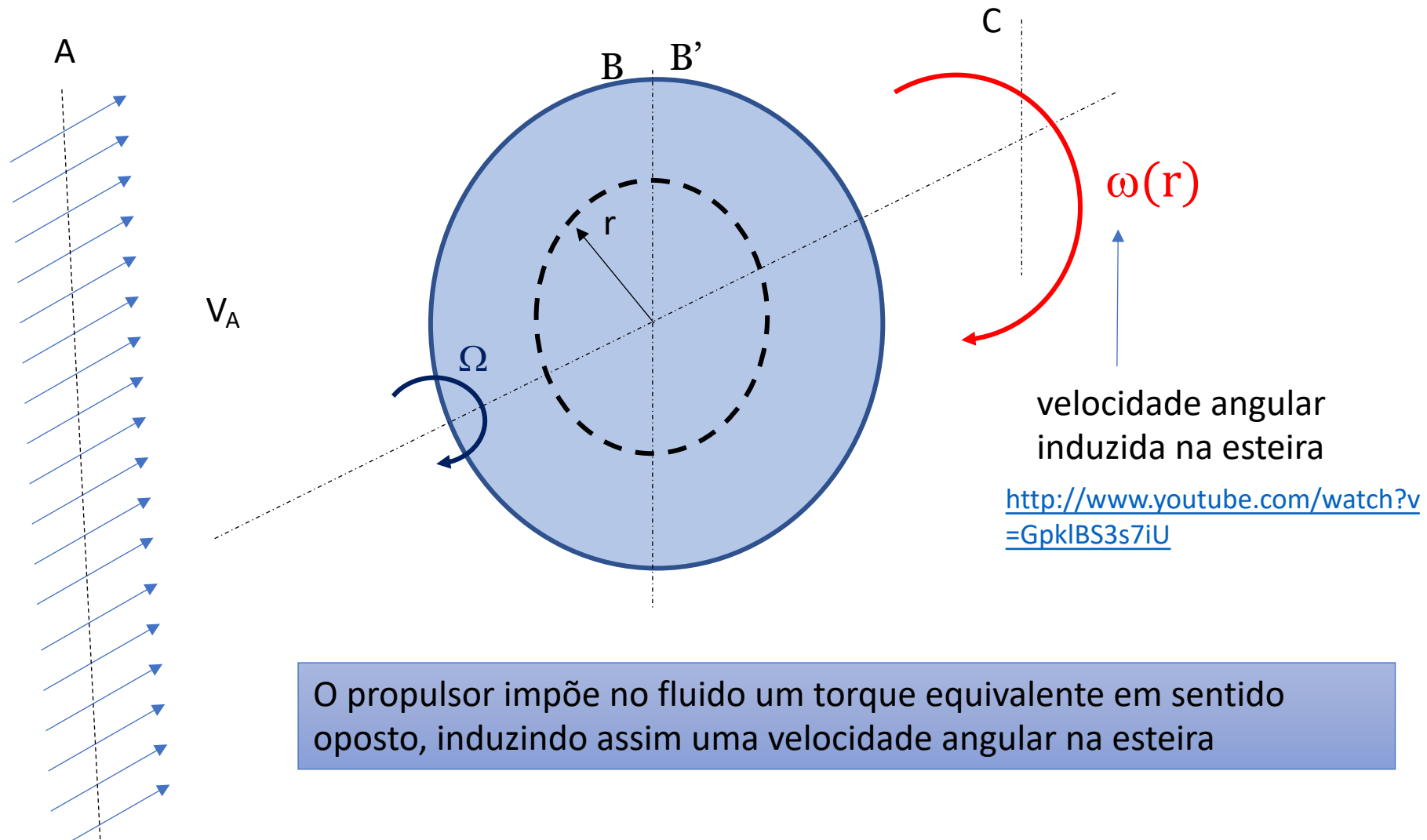
Teoria do Disco Atuador: Qtde de Movimento Axial



Velocidade angular do escoamento



Velocidade angular do escoamento



Disco atuador com qtde. de movimento angular

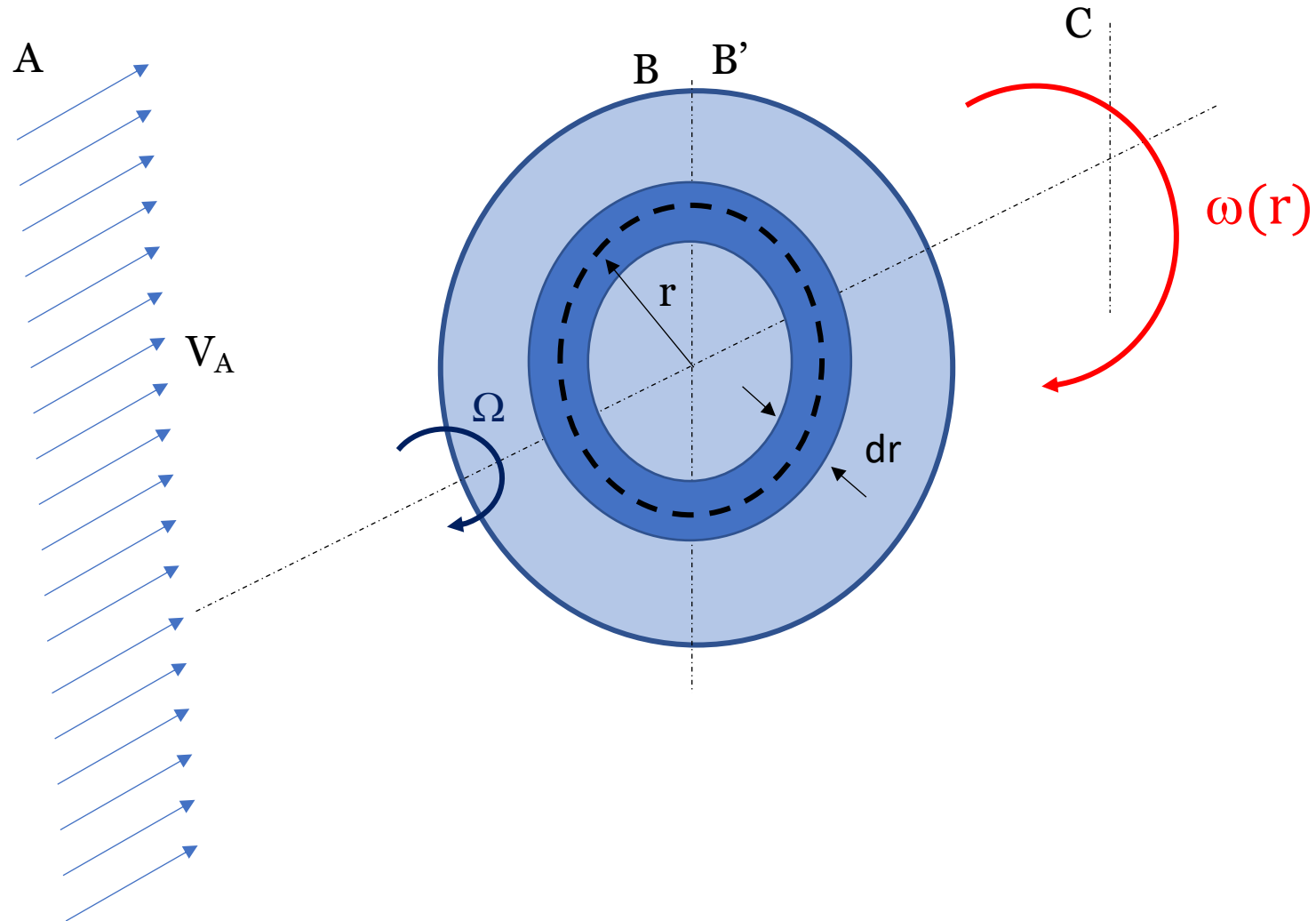
A consideração da quantidade de movimento angular do escoamento é incorporada à teoria de disco atuador a partir do início do século XX, principalmente com os trabalhos de Joukowski, Betz, Glauert e outros;

A teoria segue considerando escoamento potencial à montante e à jusante do disco;

O **torque** resistivo no propulsor estará associado à variação da ***quantidade de movimento angular*** do escoamento;

A variação da velocidade angular *através do disco* (entre B e B') deve explicar o salto de pressão entre as duas faces. Aqui, a consideração de que *a velocidade da esteira é menor do que a velocidade angular das pás* ($\omega < \Omega$) será fundamental.

Disco atuador com qtde. de movimento angular



Disco atuador com qtde. de movimento angular

Consideremos então o anel de linha média em r e espessura dr .

O modelo considera que, ao chegar à seção B do anel, o escoamento ainda não tem velocidade angular. Porém, ao atingir a seção B' a esteira já apresenta velocidade angular ω .

Aqui, vamos aplicar a equação de Bernoulli para o fluxo angular *através* do disco (entre B e B') considerando **a velocidade relativa do escoamento (W)** em cada seção:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho W^2(B) = p'_B + \frac{1}{2}\rho W^2(B')$$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho\{V_B^2 + (\Omega r)^2\} = p'_B + \frac{1}{2}\rho\{V_B^2 + [(\Omega - \omega)r]^2\}$$

E, portanto (verificar):

$$p'_B - p_B = \frac{1}{2}\rho r^2 \omega (2\Omega - \omega)$$

Disco atuador com qtde. de movimento angular

Ou também: $\Delta p = p'_B - p_B = \rho r^2 \omega (\Omega - \omega/2)$

A teoria considerará agora um fator de indução angular definido de forma que:

$$\omega = 2a'\Omega$$

Fator de indução angular (a' , $a' > 0$)

$$a' = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Omega}$$

E, então, a variação da pressão entre as faces do anel será :

$$\Delta p = p'_B - p_B = 2\rho r^2 \Omega^2 a' (1 - a')$$

Notar, então que, sem o giro da esteira ($a'=0$) não será possível, neste novo modelo, haver geração do empuxo (T)

Disco atuador com qtde. de movimento angular

De fato, o elemento de empuxo no anel de espessura dr será dado por:

$$dT = \Delta p dS = \Delta p (2\pi r dr)$$

Então:

$$dT = 4\rho\pi r^3 \Omega^2 a'(1 - a') dr$$

Ou ainda:

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = 4\rho\pi r^3 \Omega^2 a'(1 - a')} \quad \frac{[F]}{[L]} \quad \left(\frac{N}{m}\right)$$

Disco atuador com qtde. de movimento angular

Mas, a exemplo da aula passada, o elemento de empuxo no anel também pode ser calculado a partir da variação da *quantidade de movimento axial* do escoamento que atravessa o anel:

$$dT = d\dot{m}(V_C - V_A)$$

E, observando que:

$$d\dot{m} = \rho V_B dS = \rho V_A (1 + a)(2\pi r dr)$$

$$V_C - V_A = 2a V_A$$

Chega-se a:

$$dT = 4\rho\pi r V_A^2 a(1 + a) dr$$

$\frac{dT}{dr} = 4\rho\pi r V_A^2 a(1 + a)$	$\frac{[F]}{[L]} \quad \left(\frac{N}{m}\right)$
---	--

Disco atuador com qtde. de movimento angular

Igualando as duas expressões para o empuxo elementar, podemos concluir também que:

$$4\rho\pi r V_A^2 a(1 + a) = 4\rho\pi r^3 \Omega^2 a'(1 - a')$$

E, portanto:

$$\boxed{\frac{a'(1 - a')}{a(1 + a)} = \left(\frac{V_A}{\Omega r}\right)^2}$$

Nota: Suponha que, por simplicidade, consideremos o fator de indução axial como sendo uniforme sobre todo o disco ($a = \text{cte}$). Ainda assim, a expressão acima mostra que $a' = a'(r)$

Disco atuador com qtde. de movimento angular

TORQUE SOBRE O ANEL (dQ):

Pode ser calculado a partir da variação da quantidade de movimento angular do escoamento que atravessa o anel, lembrando que este escoamento tem vazão em massa $d\dot{m}$:

$$dQ = \left(\frac{d(I\omega)}{dt} \right)_{A \rightarrow C} = (d\dot{m}r^2)\omega$$

E, portanto: $dQ = [\rho V_A(1 + a)(2\pi r dr)r^2]\omega$

$$dQ = [\rho V_A(1 + a)(2\pi r dr)r^2](2a'\Omega)$$

$$dQ = 4\rho\pi r^3 V_A \Omega a'(1 + a)dr$$

$\frac{dQ}{dr} = 4\rho\pi r^3 V_A \Omega a'(1 + a)$	$\frac{[F][L]}{[L]} \left(\frac{Nm}{m} \right)$
---	--

Disco atuador com qtde. de movimento angular

Dessa forma, fica claro que, *se conhecidos os fatores de indução a e a'* , é possível calcular o empuxo (dT) e o torque (dQ) sobre o anel.

Podemos também definir uma eficiência hidrodinâmica do anel (η_r) a partir da seguinte relação de potências:

$$\eta_r = \frac{dT V_A}{dQ \Omega}$$

E, portanto (verificar):

$$\eta_r = \frac{(1 - a')}{(1 + a)}$$

energia dispendida para
provocar o giro da esteira

energia dispendida para
acelerar o escoamento à
montante

Disco atuador com qtde. de movimento angular

Ainda sem fazer nenhuma consideração adicional sobre a geometria do propulsor (por exemplo, ignorando a existência do bosso), poderíamos então escrever:

$$T = \int_0^R \left(\frac{dT}{dr} \right) dr$$
$$Q = \int_0^R \left(\frac{dQ}{dr} \right) dr$$
$$\eta = \frac{TV_A}{Q\Omega}$$

No entanto, a Teoria de Disco atuador não é capaz de, por si só, quantificar os fatores de indução (e as forças).

É necessário um modelo adicional capaz de descrever as forças na seção das pás a partir da geometria desta seção (fólio), o que será obtido através da chamada *Teoria de Elemento de Pá*.