

# Introdução a Física Nuclear

▶ Prof. Valdir Guimarães

▶ Instituto de Física

**Aula 12 - Decaimento alfa**

# Tratamento quântico do decaimento

## Tratamento quântico do decaimento.

- ❑ O decaimento é um processo probabilístico e sujeito as leis da mecânica quântica.
- ❑ Uma vez que o tempo de meia vida dos núcleos é muito maior que os tempos envolvidos nas interações nucleares ( $10^{-22}$  s), podemos então dizer que um estado é aproximadamente estável mas com uma pequena probabilidade de decair.
- ❑ Vamos agora verificar como podemos obter a taxa de decaimento a partir da perturbação de funções de onda.
- ❑ Considere a hamiltoniana  $H_0$  como sendo a hamiltoniana de um estados estacionário estável e  $V$  uma determinada perturbação.

$$H = H_0 + V,$$

- ❑  $H$  é a hamiltoniana do estado perturbado.

- Podemos então expandir a função de onda do estado instável com uma superposição das funções de onda do estado estacionário

$$\Psi = \sum a_n(t) \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

- Usando que:  $H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$  e  $H_0\Psi = E_n\Psi$

$$i\hbar \sum_n \dot{a}_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_n V a_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$



$$\dot{a}_k = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n V_{kn} e^{i\frac{E_k - E_n}{\hbar} t}$$

Onde  $V_{kn} = \int \psi_k^* V \psi_n d\tau$  é o elemento de matriz da perturbação.

- ❑ Para obtermos as amplitudes, temos que integrar entre 0 e um tempo  $T$

$$a_k = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T V_{km} e^{i \frac{E_k - E_m}{\hbar} t} dt$$

- ❑ Que fornece:



$$a_k = \frac{V_{km} (1 - e^{i \frac{E_k - E_m}{\hbar} T})}{E_k - E_m}$$

- ❑ A constante de decaimento é obtida pela soma das amplitudes sobre todos os estados.

$$\lambda = \sum_{k \neq m} \lambda_k = \frac{\sum |a_k|^2}{T}$$

- ❑ Se a densidade de estados disponíveis, em torno estado de da energia  $E_k$ , for alta podemos integrar.

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \rho(E_k) dE_k$$

- ❑ Onde  $\rho$  é a densidade de estados. A constante de decaimento seria então como uma média ponderada do decaimento de todos os estados.

## Probabilidade de transição – regra de ouro

- A integral nos fornece:

$$\lambda = \frac{4}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |V_{km}|^2 \frac{\text{sen}^2 \left[ \left( \frac{E_k - E_m}{2\hbar} \right) T \right]}{(E_k - E_m)^2} \rho(E_k) dE_k$$

- Considerando que a função  $\text{sen}^2(x)/x^2$  só é importante próximo da origem e que  $V_{km}$  e  $\rho$  não variam muito no intervalo de energia  $E_k + dE_k$ , eles podem sair da integral, o resultado dá:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{km}|^2 \rho(E_k)$$

Essa expressão corresponde a taxa de decaimento ou transição entre dois estados (probabilidade por unidade de tempo) de um auto-estado de uma hamiltoniana  $H_0$  devido a uma perturbação  $V$ .

Também pode ser utilizada para se obter em primeira ordem as seções de choque de processos induzidos pela interação de partículas através de um potencial  $V$ .

**Também é conhecida como regra de ouro número 2 ou regra de ouro de fermi.**

## Regra de ouro de fermi.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{km}|^2 \rho(E_k)$$

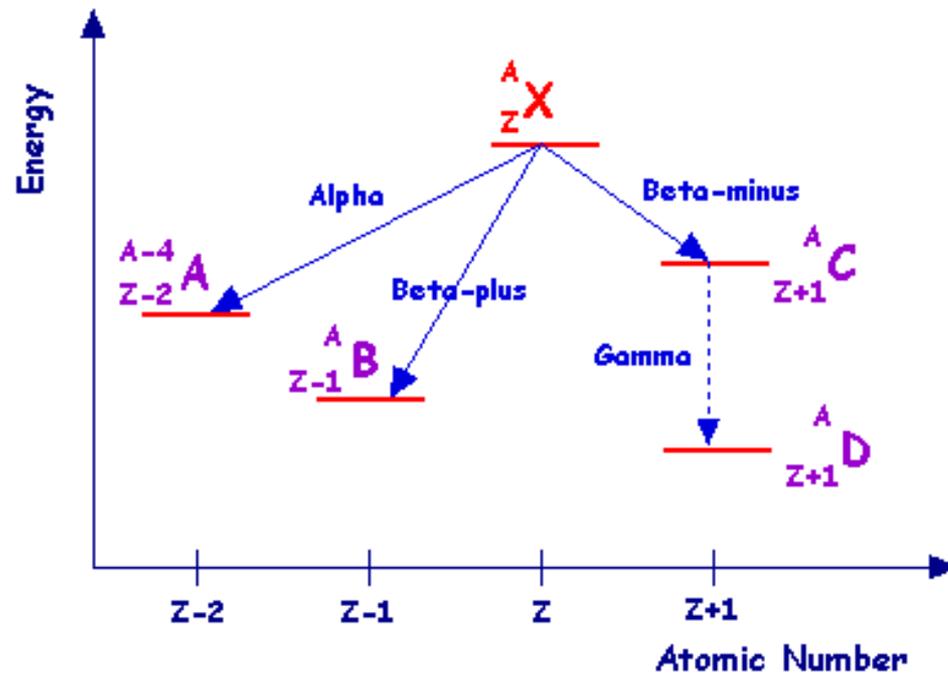
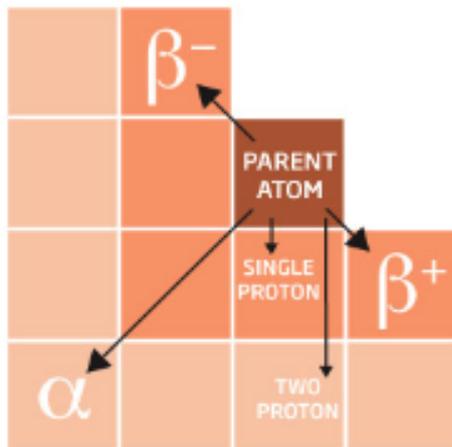
Elemento de matriz que conecta o estado final e inicial

Densidade de estados.

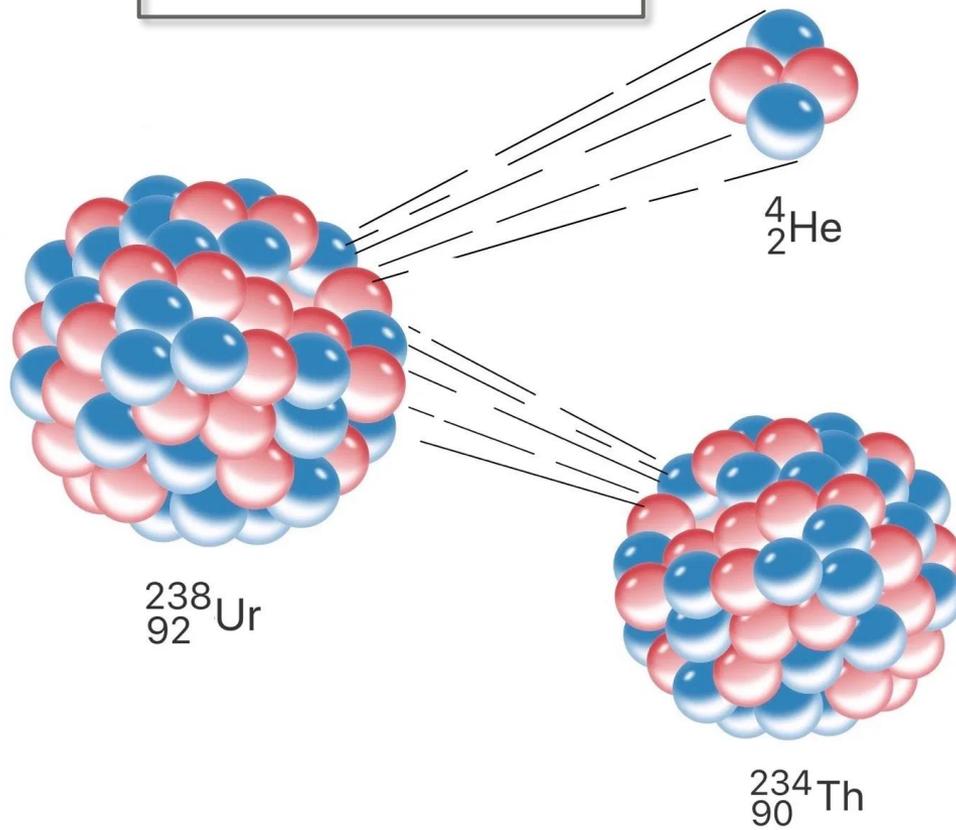
$$V_{km} = \langle k|V|m \rangle$$

# Decaimentos espontâneos

- $\beta$  decay
- n decay
- p decay
- $\alpha$  decay
- $\gamma$  decay
- fissão



## Decaimento $\alpha$

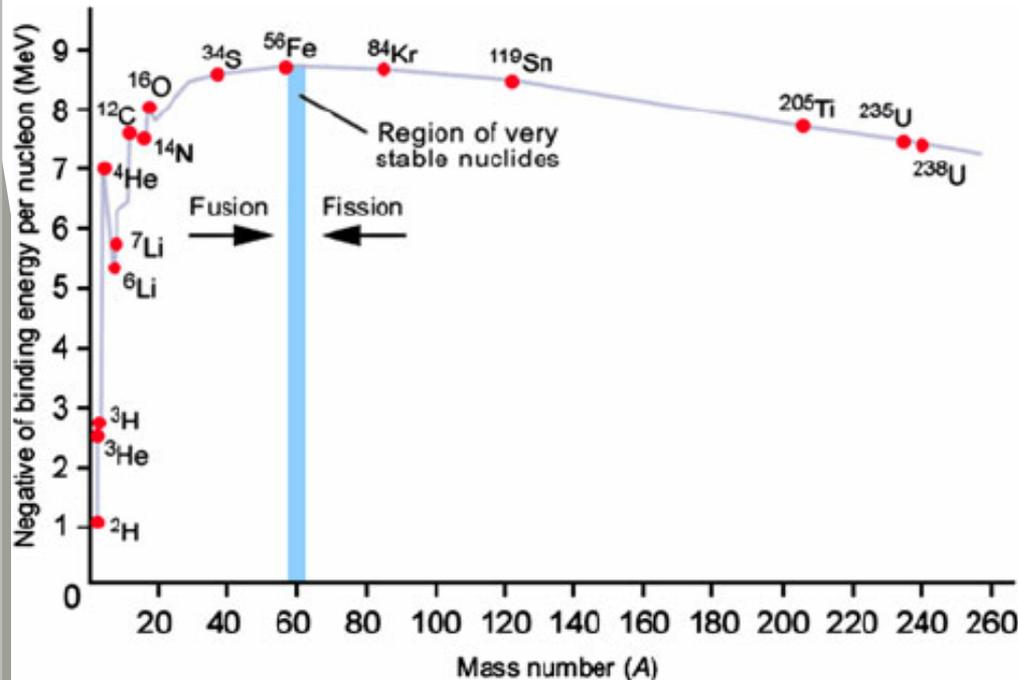


# Energia de ligação

- ❑ Partícula alfa é um núcleo duplamente mágico e fortemente ligada.
- ❑ Tem uma alta energia de ligação por nucleon. Considerando as massas atômicas:

$$B\left(\frac{A}{Z}X\right) = \Delta m \times c^2 = [Zm_H + Nm_n - m\left(\frac{A}{Z}X\right)] \times c^2$$

$$\begin{aligned} \Delta m(^4_2\text{He}) &= [Zm_H + Nm_n - m(^4\text{He})] \\ &= [2 \times 1.007825 + 2 \times 1.008665 - 4.002604] \\ &= 0.030376 \text{ u} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} B(^4_2\text{He}) &= \Delta m(^4_2\text{He}) \times (c^2) \\ &= 0.030376 \times 931.49 \left(\frac{\text{MeV}}{\text{u}}\right) \\ &= 28.29 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{28.29}{4} = 7.07 \text{ MeV}$$

## Q-de-reação

- ❑ Decaimento alfa é o decaimento de partículas carregada mais comum
- ❑ O decaimento pode ser descrito como:



- ❑  $Q_\alpha$  é o Q-de-reação (positivo libera energia, negativo precisa de energia para ocorrer).
- ❑ Considerando a massa nuclear ( $m_N$ ):

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= m_N({}_Z^A X) - m_N({}_{Z-2}^{A-4} Y) - m_N({}_2^4 \text{He}) \\ &= Zm_p + (A - Z)m_n - BE({}_Z^A X) \\ &\quad - (Z - 2)m_p - (A - Z - 2)m_n + BE({}_{Z-2}^{A-4} Y) \\ &\quad - 2m_p - 2m_n + BE({}_2^4 \text{He}) \end{aligned}$$

Usando que:  $B({}_Z^A X) = [Zm_H + Nm_n - m({}_Z^A X)] c^2$

$$Q_\alpha = BE({}_{Z-2}^{A-4} Y) + BE({}_2^4 \text{He}) - BE({}_Z^A X)$$

- ❑  $Q_\alpha$  positivo corresponde a emissão espontânea de partículas alfa.

# Energia de separação

- ❑ Além do Q-de-reação temos também a energia de separação.
- ❑ Os núcleos pesados são emissores de partículas alfas, tem emissão de alfa com Q positivo (energeticamente favorável)

Fonte: Krane pg 250.

**Table 8.1** Energy Release (Q value) for Various Modes of Decay of  $^{232}\text{U}^a$

Emitted Particle	Energy Release (MeV)	Emitted Particle	Energy Release (MeV)
n	-7.26	$^4\text{He}$	+5.41
$^1\text{H}$	-6.12	$^5\text{He}$	-2.59
$^2\text{H}$	-10.70	$^6\text{He}$	-6.19
$^3\text{H}$	-10.24	$^6\text{Li}$	-3.79
$^3\text{He}$	-9.92	$^7\text{Li}$	-1.94

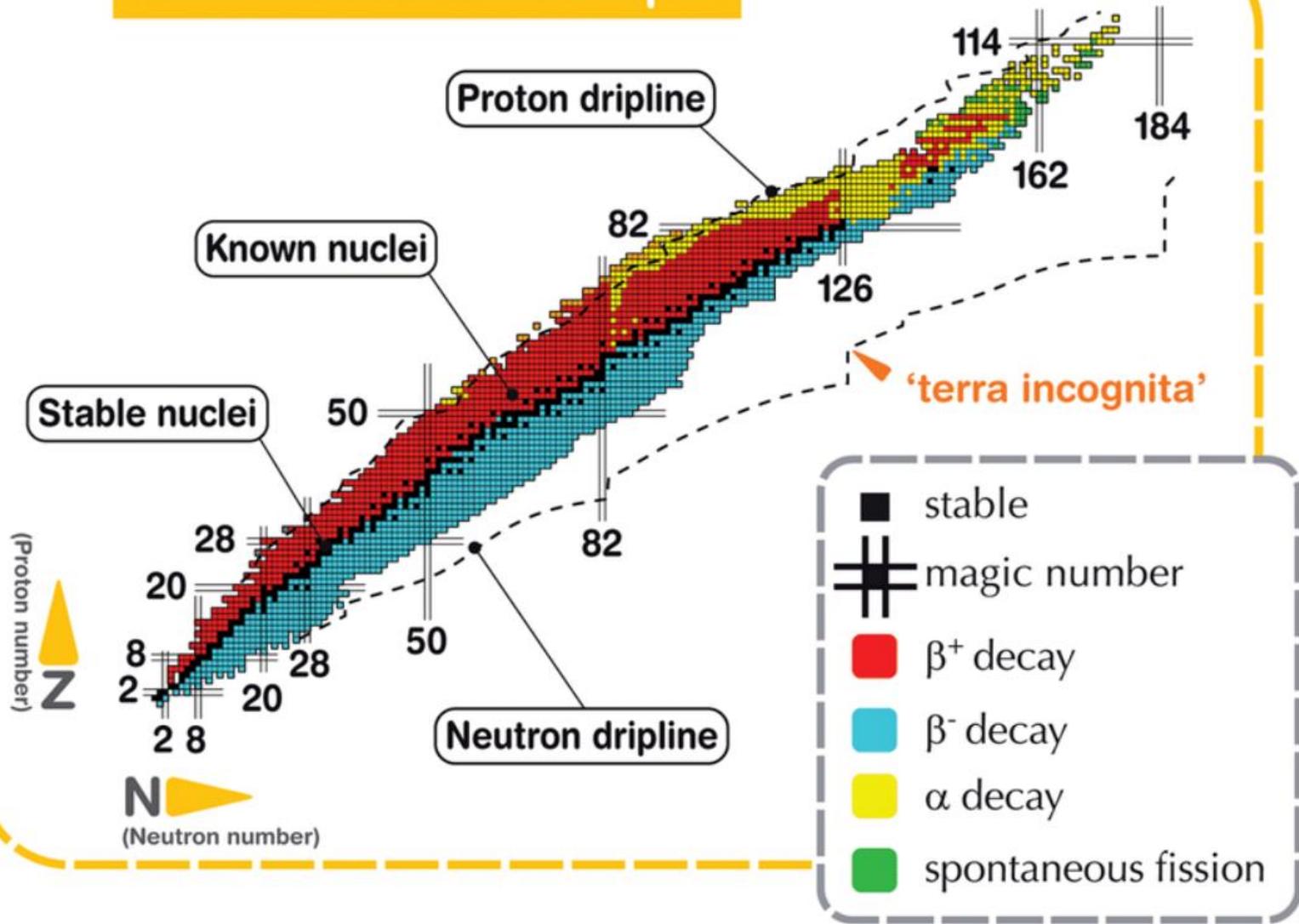
<sup>a</sup>Computed from known masses.

- ❑ Devemos lembrar que a energia de separação tem sinal trocado com o Q-de-reação

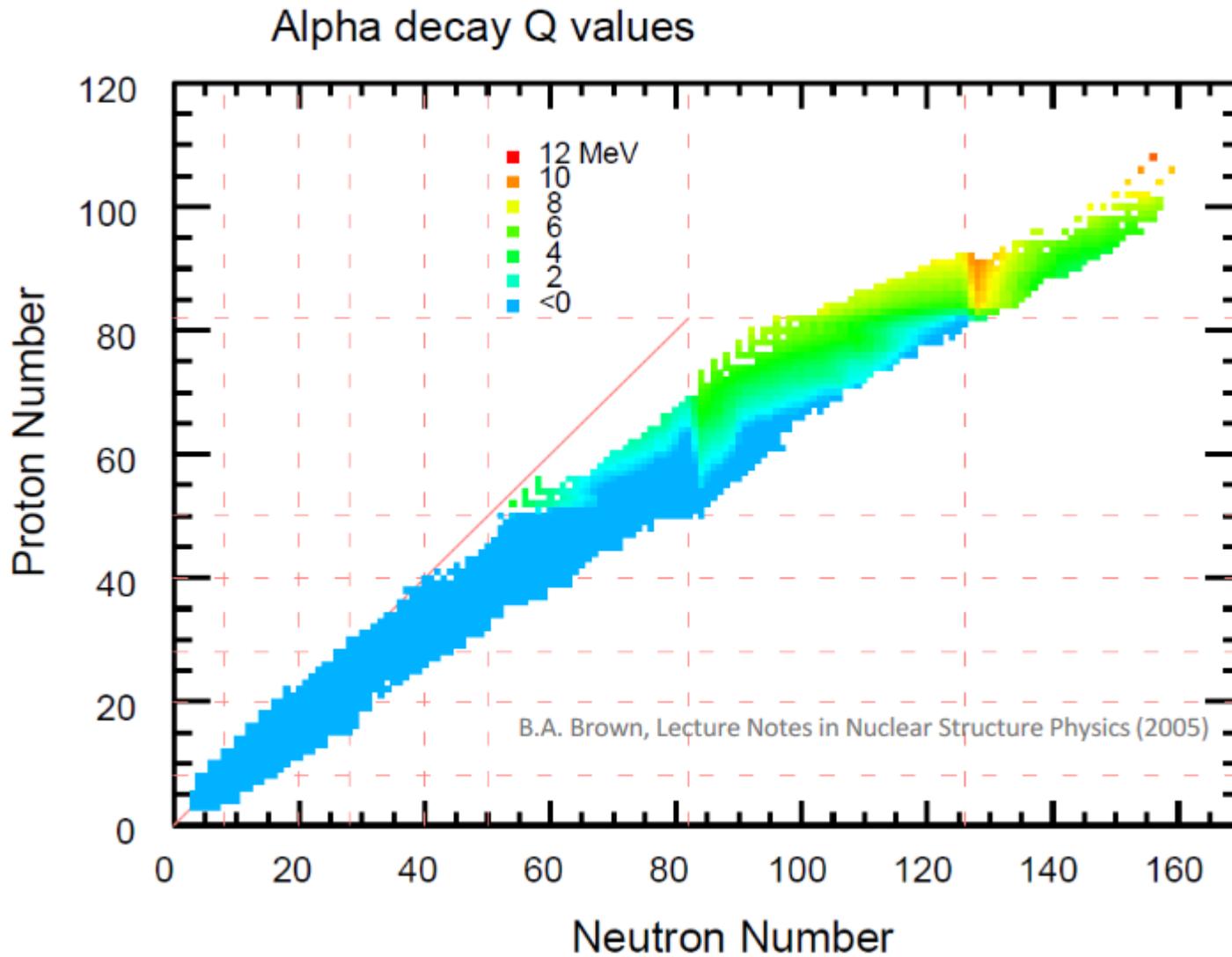
$$S_\alpha = (m_X + m_\alpha - m_Y)c^2 = -Q_\alpha$$

$$\begin{aligned} S_\alpha &= B(A, Z) - B(A - 2, Z - 2) - B(4, 2) \\ &= B(A, Z) - B(A - 2, Z - 2) - 28.3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

# The Nuclear Landscape

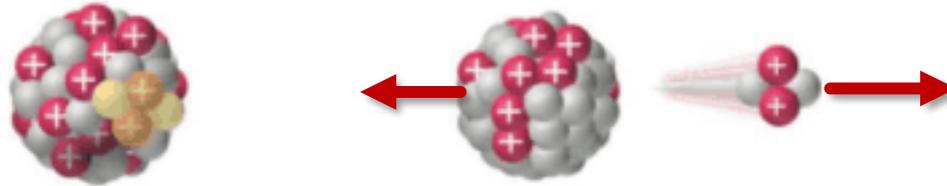


# Energia do decaimento alfa



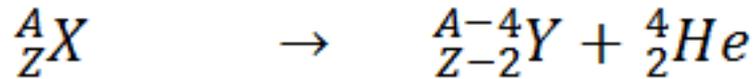
# Energia cinética das alfas

- O Q-de-reação devido a diferença de massa é então convertido em energia cinética da partícula alfa e do núcleo residual.



Antes

depois



- Conservação do momento  $\vec{p}_Y = -\vec{p}_\alpha$

- Conservação energia  $Q_\alpha = T_Y + T_\alpha = \frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} + \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha}$

$$\Rightarrow T_\alpha = Q_\alpha \frac{1}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}} = Q_\alpha \frac{m_Y}{m_Y + m_\alpha}$$

# Energia cinética das alfas

- ❑ Para núcleos pesados  $A \gg 4$  (que em geral é o caso)



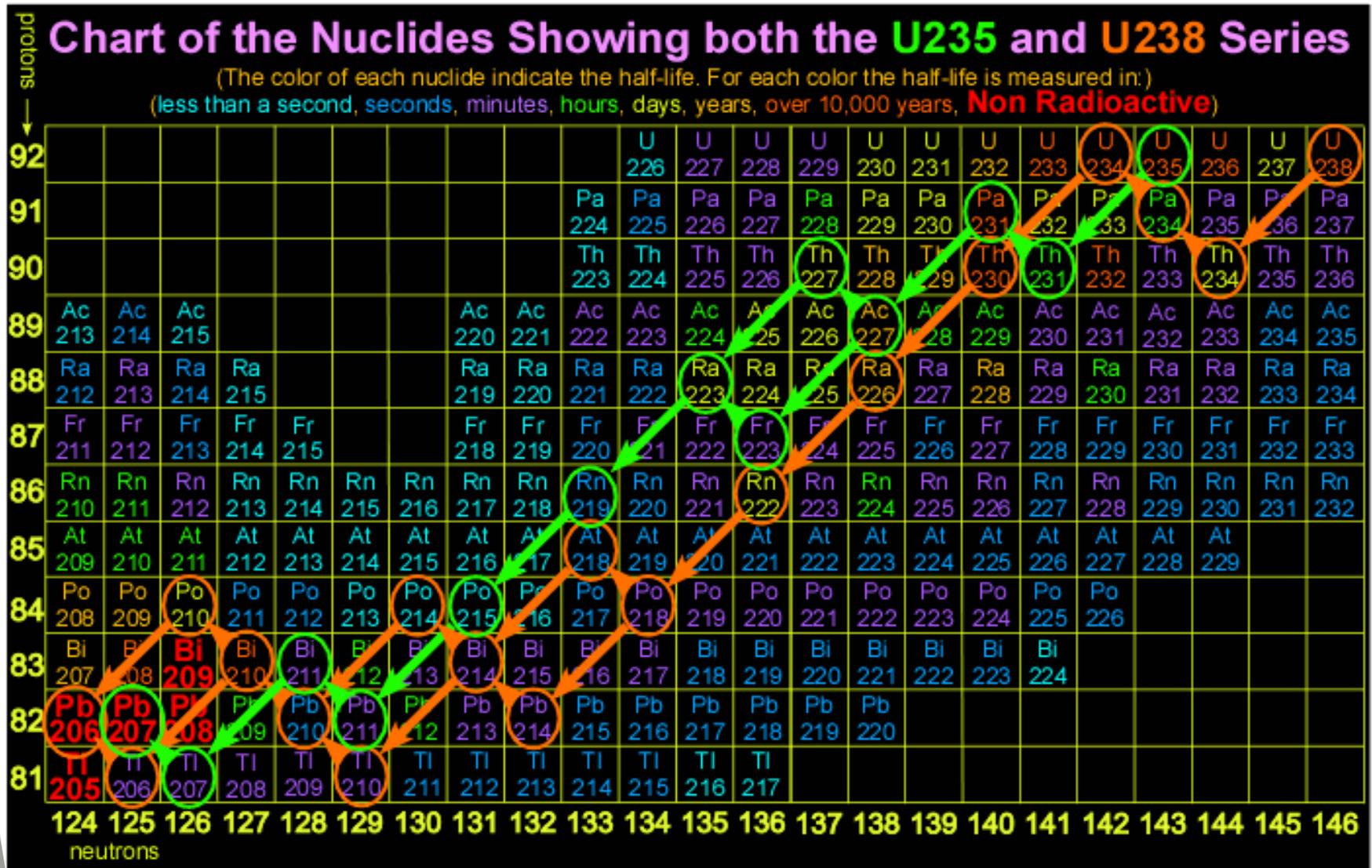
$$T_\alpha = Q_\alpha \frac{m_Y}{m_Y + m_\alpha} = Q_\alpha \frac{m_Y}{m_X} = Q_\alpha \frac{m_X - m_\alpha}{m_X} = Q_\alpha \left(1 - \frac{m_\alpha}{m_X}\right) \approx Q_\alpha \left(1 - \frac{4}{A}\right)$$

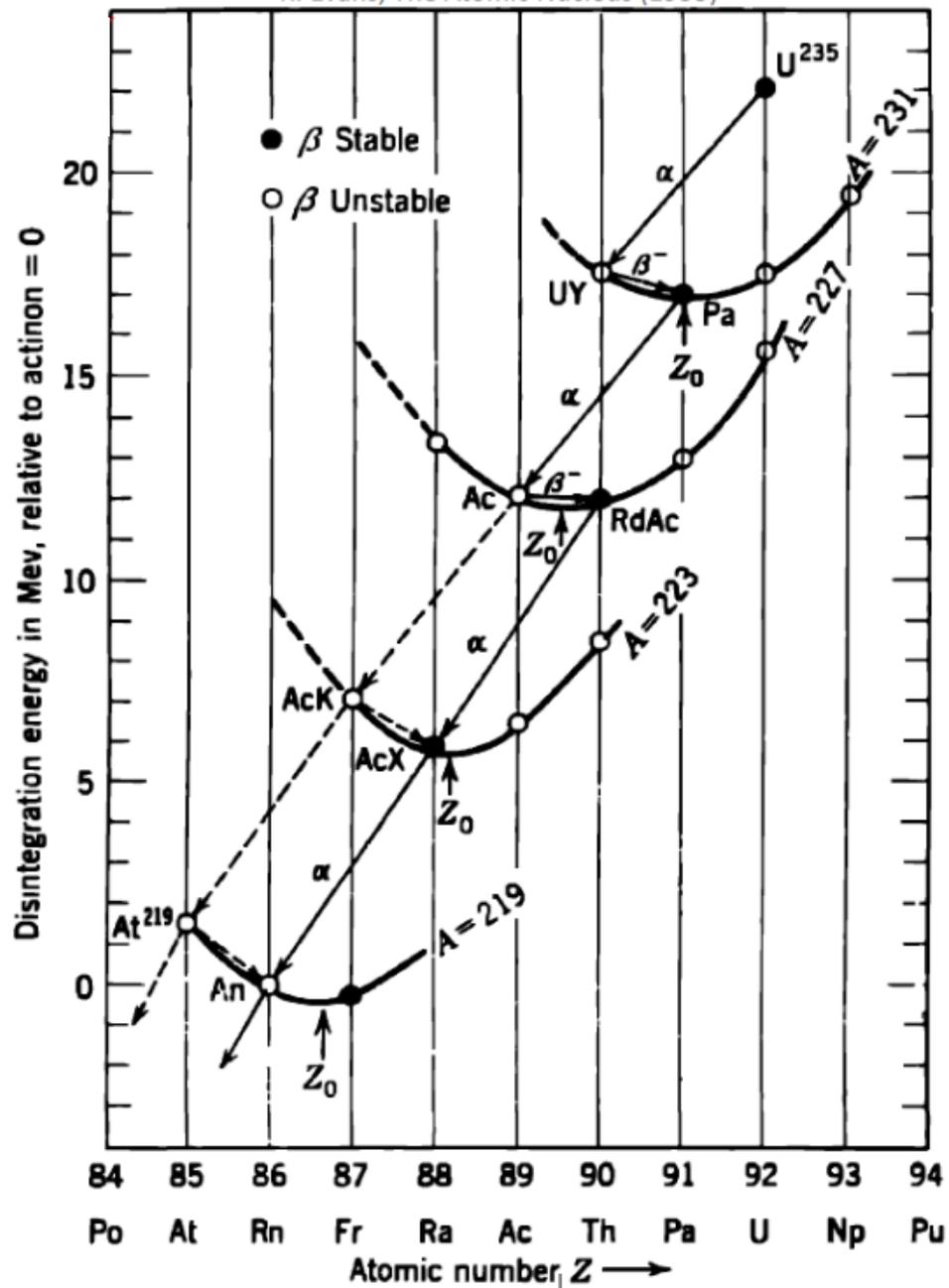
- ❑ A energia de recuo do núcleo Y seria então:

$$T_Y = T_\alpha - Q_\alpha \approx Q_\alpha \left(\frac{4}{A}\right)$$

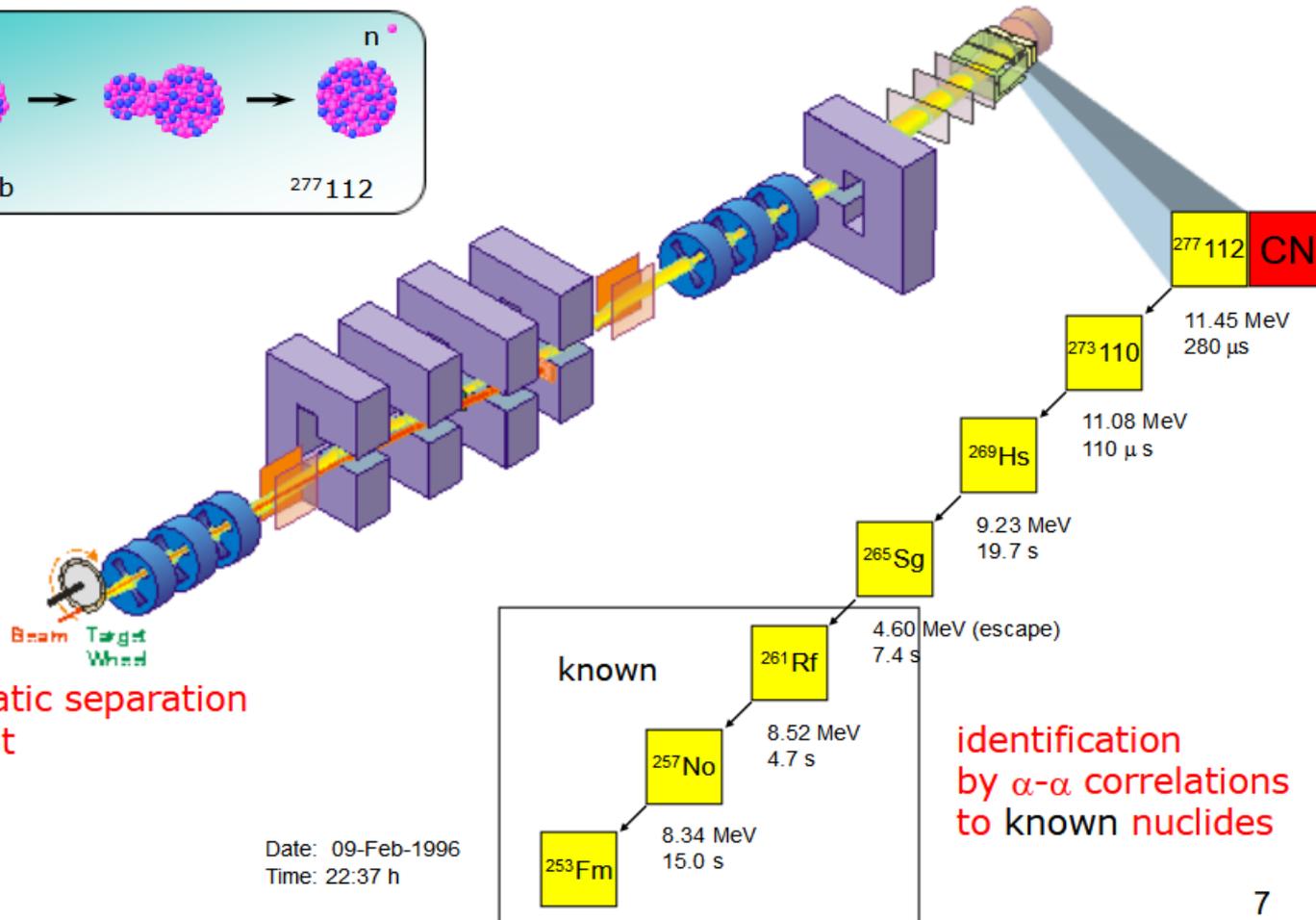
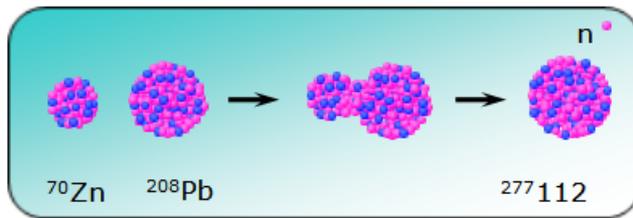
- ❑ Para núcleos com  $A=200$  a energia cinética da alpha é 98% do valor de  $Q_\alpha$  enquanto que a energia do núcleo de recuo teria os outros 2%.
- ❑ Os valores dos  $Q_\alpha$  são em torno de 7 MeV e as partículas alfas terão mais ou menos essa energia cinética.
- ❑ Essas energias podem ser úteis para se determinar massas de núcleos radiativos residuais não conhecidas.

# Decaimento sequencial





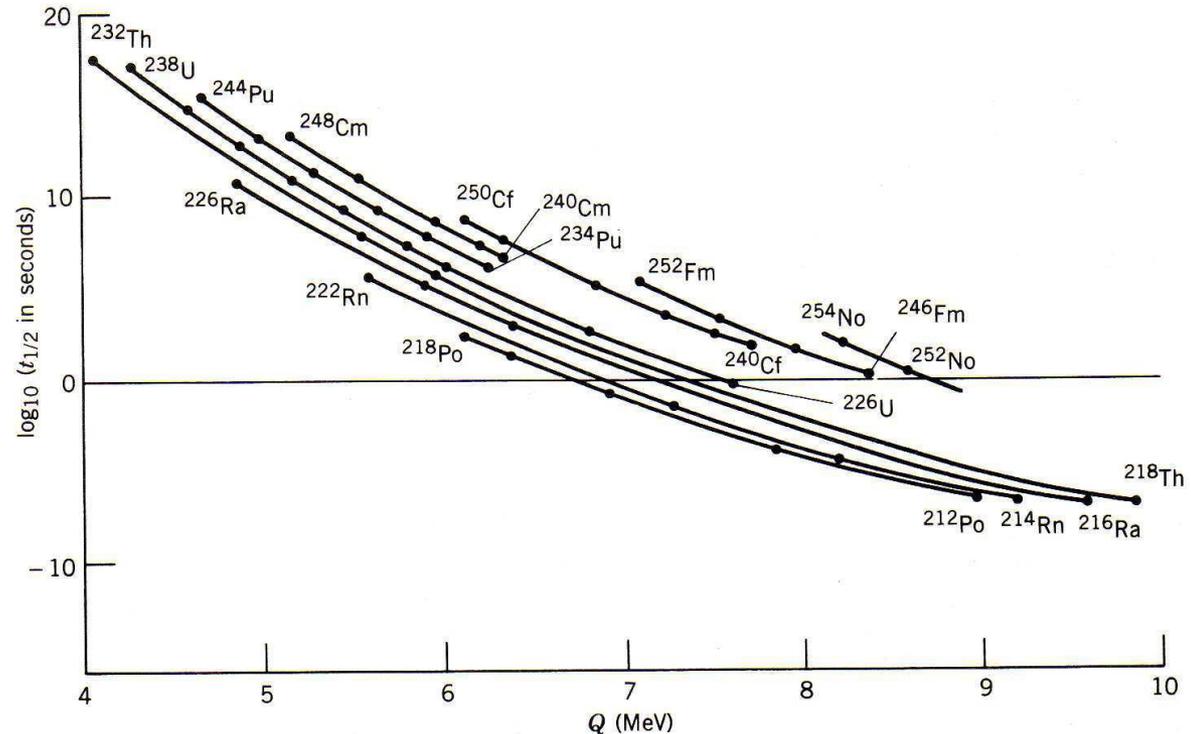
## Synthesis of Z=112 SHE at SHIP



# Sistemática do decaimento

- ❑ Dois estudantes de Rutherford estudaram os decaimentos alfas procurando por alguma regra que relacionasse o tempo de meia vida com o Q-de-reação ( $Q_\alpha$ )
- ❑ Primeiramente eles determinaram uma relação entre meia vida e o comprimento do traço deixado pelas partículas alfas ao decaírem (energia).
- ❑ Mais tarde a regra Geiger-Nuttall foi elaborada para a relação entre meia vida e  $Q_\alpha$

$$\ln(\tau_\alpha) = A + \frac{B}{\sqrt{Q_\alpha}}$$



Fonte: Krane pg 249.

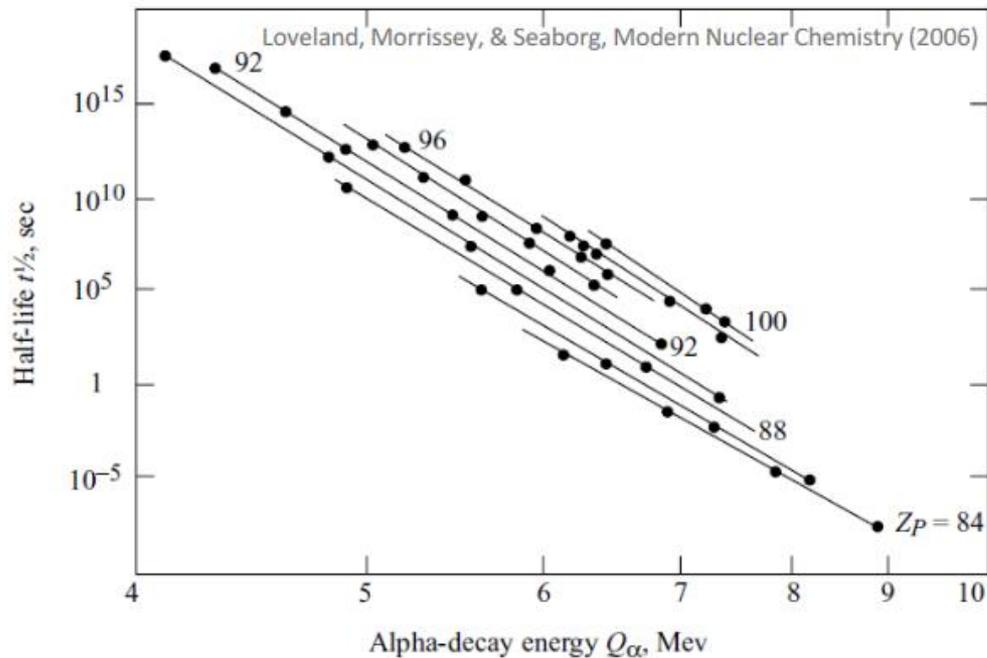
Uma curva para cada isótopo (mesmo elemento mas massa diferente).

# Sistemática do decaimento

- ❑ A regra Geiger-Nuttall foi elaborada empiricamente para obter a forte relação entre meia vida e  $Q_\alpha$

$$\ln(\tau_\alpha) = A + \frac{B}{\sqrt{Q_\alpha}}$$

- ❑ Qualquer tentativa de explicar teoricamente o decaimento alfa deve explicar essa relação.



- ❑ Cada curva corresponde ao mesmo elemento com diferentes massas (isótopos)

# Potencial e Q

- ❑ A partícula alfa para ser emitida deve atravessar a barreira coulombiana.
- ❑ Vamos calcular o valor da barreira coulombiana:

$$V_C = 1.44 \frac{Z_\alpha(Z-2)}{1.2(\sqrt[3]{A-4} + \sqrt[3]{4})} = 2.4 \frac{Z-2}{\sqrt[3]{A-4} + 1.59} [\text{MeV}]$$

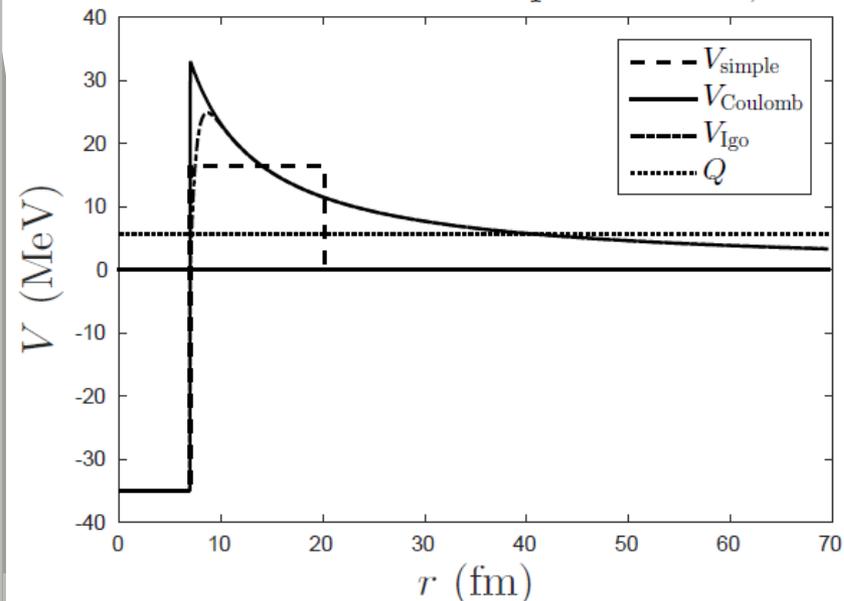
Soma dos raios do núcleo residual e da partícula alfa

Para  $^{238}\text{U}$  ( $A=238$  e  $Z=92$ )

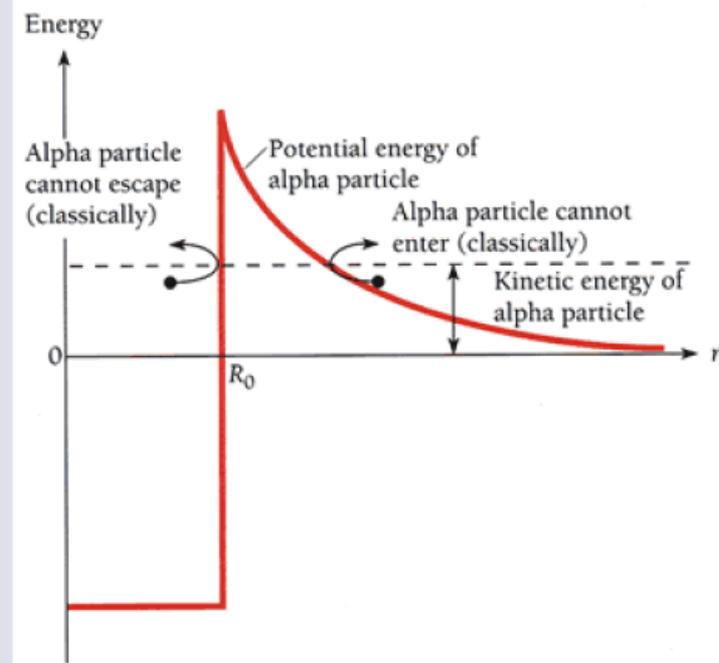
$$V_C = 2.4 \frac{Z-2}{\sqrt[3]{A-4} + 1.59} = 27.9 [\text{MeV}]$$

$$Q_\alpha = 4.2 \text{ MeV}$$

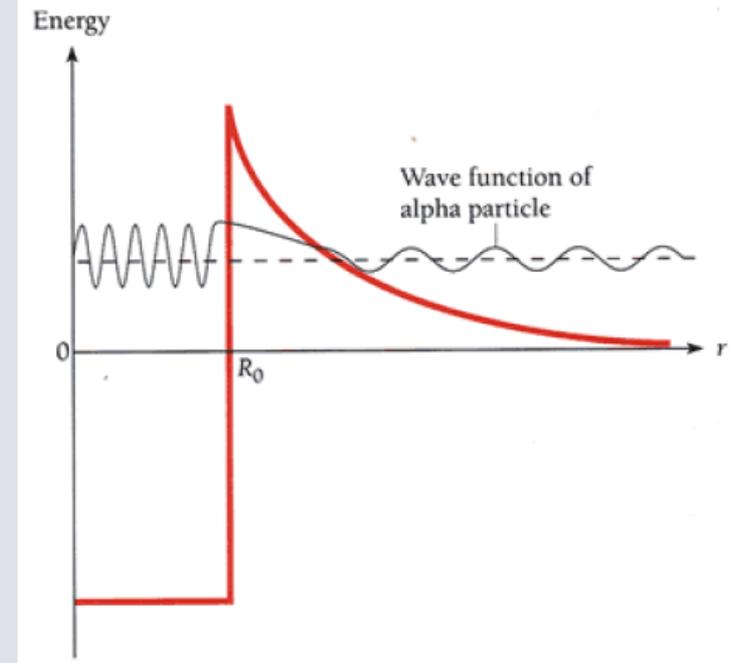
A partícula alfa precisa atravessar uma barreira



## Classical Treatment



## Quantum Treatment

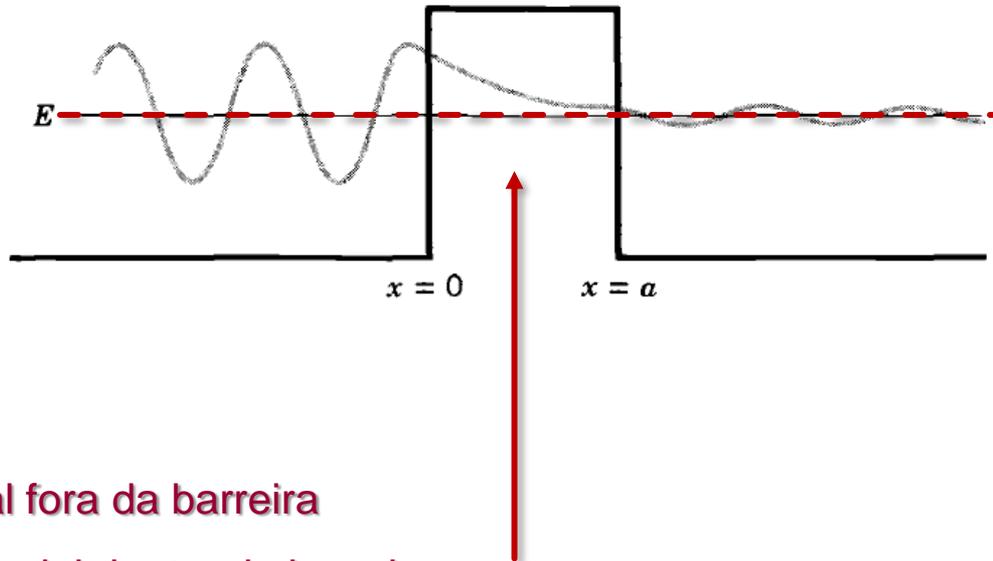


Slide 3 — Prof. Kyle Leach — PHGN 422: Nuclear Physics

# Coefficiente de transmissão

Coefficiente de transmissão

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)} \sinh^2 k_2 a}$$

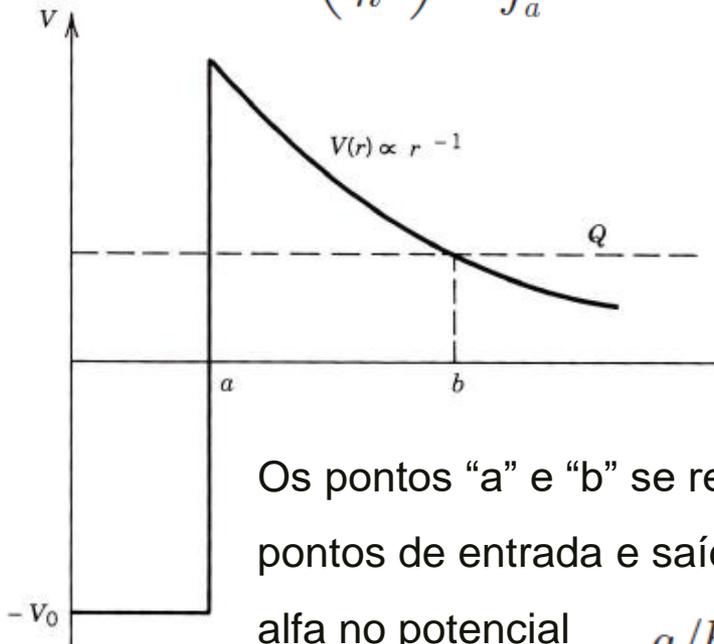


- ❑ Onda senoidal fora da barreira
- ❑ Onda exponencial dentro da barreira
- ❑ Quando o comprimento de onda da partícula é muito menor do que a largura da barreira podemos considerar que  $K_2 a \ll 1$
- ❑ O coeficiente de transmissão pode então ser aproximado para  $T \sim C e^{-2k_2 a}$

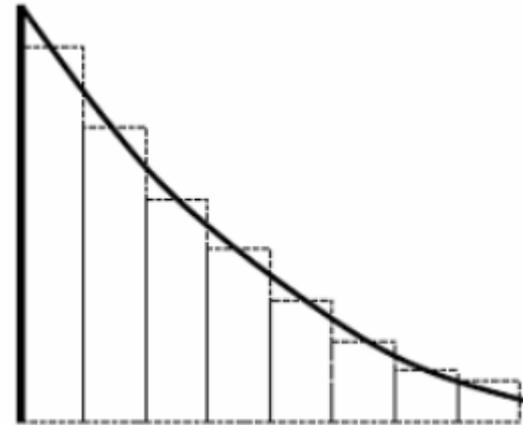
## Seguindo tratamento dado pelo livro do Krane ...

- Podemos considerar a barreira Coulombiana como sendo uma soma de barreiras quadradas.
- Gamow determinou que o coeficiente de transmissão seria então dado pelo produto de cada coeficiente de transmissão :  $T = T_1 T_2 T_3 T_4 \dots T_N$
- O total seria então  $T \sim C e^{-2G}$
- Onde  $G$  é o fator de Gamow

$$G = \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_a^b dr \sqrt{V(r) - Q}$$



$$a/b = Q/B$$



$$V(x) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$$

$$V(a) \equiv B = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$a = R_0(A-4)^{1/3}$$

$$V(b) \equiv Q = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 b}$$

## Coeficiente de transmissão

- ❑ Fazendo a integração e substituindo os potenciais dos pontos “a” e “b” obtemos:

$$T = \exp \left\{ -2 \left( \frac{2m'_\alpha c^2}{Q(\hbar c)^2} \right)^{1/2} \frac{zZ'e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \arccos(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1-x)} \right] \right\}$$
$$x \equiv a/b = Q/B \qquad m'_\alpha = \frac{m_\alpha m_{X'}}{m_\alpha + m_{X'}} \approx m_\alpha (1 - 4/A)$$

- ❑ No entanto a probabilidade do decaimento alfa vai depender de dois fatores:
  - 1) A probabilidade da partícula alfa chegar no potencial e
  - 2) A probabilidade dela atravessar o potencial.
- ❑ Portanto a probabilidade da partícula alfa decair num certo intervalo de tempo é:

$$\lambda = f \cdot T = \frac{v}{a} T$$

Coeficiente de transmissão

Frequência com que a partícula alfa bate na barreira

$v$  = velocidade da partícula alfa  
 $a$  = largura do poço de potencial  
 $a = 2R$  (raio do núcleo)

## Taxa de decaimento

$$T = \exp \left\{ -2 \left( \frac{2m'_\alpha c^2}{Q(\hbar c)^2} \right)^{1/2} \frac{zZ'e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \arccos(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1-x)} \right] \right\}$$

$x \equiv a/b = Q/B$

- Para o caso em que  $b \gg a$  [ $b \gg R$ ] ou  $B \gg Q$  [ $V_B \gg Q_\alpha$ ] podemos aproximar para:

$$T = e^{-2G} \quad 2G = 2\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q_\alpha}} (Z_\alpha Z_d e^2) \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

- Considerando  $Z_d = (Z-2)$  e a velocidade da partícula alfa dentro do núcleo:

$$\frac{\mu v^2}{2} = V_0 + Q_\alpha \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v}{2R} = \frac{\sqrt{2(V_0 + Q_\alpha)/\mu}}{2R}$$

- A taxa de decaimento é então dada por:

$$\lambda_\alpha = fT = \sqrt{\frac{2(Q_\alpha + V_0)}{\mu}} \frac{1}{2R} e^{-2G}$$

- Podemos determinar a meia vida e vida média a partir da constante de decaimento.

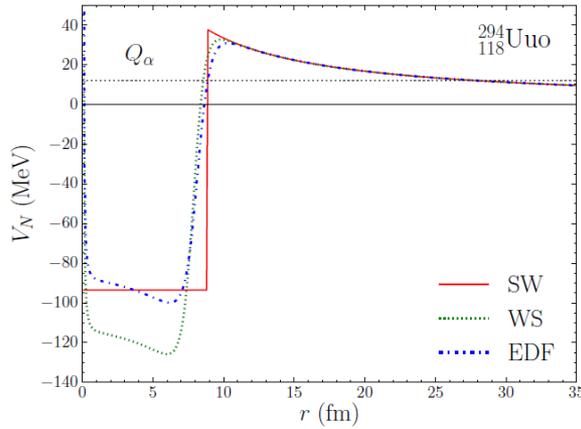
$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- Considerando que:  $\lambda_{\alpha} = fT = \sqrt{\frac{2(Q_{\alpha} + V_0)}{\mu}} \frac{1}{2R} \exp\left(-\frac{b}{\sqrt{Q_{\alpha}}}\right)$



$$\log t_{1/2} = a + \frac{b}{\sqrt{Q_{\alpha}}}$$

- Portanto a expressão derivada para a constante de decaimento é consistente com a expressão empírica obtida por Geiger e Nuttall



❑ Resultado considerando diferentes potenciais.

$(Z, A)$	$Q_{\alpha}^{\text{Expt.}}$ (MeV)	$T_{1/2}^{\text{Expt.}}$	$T_{1/2}^{\text{SW}}$	$T_{1/2}^{\text{WS}}$	$T_{1/2}^{\text{EDF}}$
(118, 294)	$11.81 \pm 0.06$	$0.89^{+1.07}_{-0.31}$ ms	$1.48^{+0.52}_{-0.38}$ ms	$1.40^{+0.50}_{-0.37}$ ms	$0.40^{+0.15}_{-0.11}$ ms
(116, 293)	$10.67 \pm 0.06$	$53^{+62}_{-19}$ ms	$161^{+68}_{-47}$ ms	$243^{+104}_{-72}$ ms	$52^{+23}_{-16}$ ms
(116, 292)	$10.80 \pm 0.07$	$18^{+16}_{-6}$ ms	$78^{+38}_{-25}$ ms	$80^{+40}_{-27}$ ms	$25^{+13}_{-8}$ ms
(116, 291)	$10.89 \pm 0.07$	$6.3^{+11.6}_{-2.5}$ ms	$47^{+23}_{-15}$ ms	$69^{+34}_{-22}$ ms	$16^{+8}_{-5}$ ms
(116, 290)	$11.00 \pm 0.08$	$7.1^{+3.2}_{-1.7}$ ms	$26.1^{+14.6}_{-9.3}$ ms	$26.2^{+15.0}_{-9.4}$ ms	$8.9^{+5.0}_{-3.3}$ ms
(115, 288)	$10.61 \pm 0.06$	$87^{+105}_{-30}$ ms	$115^{+48}_{-34}$ ms	$99^{+42}_{-29}$ ms	$43^{+19}_{-13}$ ms
(115, 287)	$10.74 \pm 0.09$	$32^{+155}_{-14}$ ms	$55^{+37}_{-22}$ ms	$38^{+26}_{-15}$ ms	$21^{+15}_{-8}$ ms
(114, 289)	$9.96 \pm 0.06$	$2.7^{+1.4}_{-0.7}$ s	$2.7^{+1.3}_{-0.9}$ s	$4.3^{+2.1}_{-1.4}$ s	$1.1^{+0.5}_{-0.3}$ s
(114, 288)	$10.09 \pm 0.07$	$0.8^{+0.32}_{-0.18}$ s	$1.2^{+0.67}_{-0.43}$ s	$1.32^{+0.74}_{-0.47}$ s	$0.48^{+0.27}_{-0.17}$ s
(114, 287)	$10.16 \pm 0.06$	$0.48^{+0.16}_{-0.09}$ s	$0.79^{+0.36}_{-0.25}$ s	$1.21^{+0.56}_{-0.38}$ s	$0.32^{+0.15}_{-0.10}$ s
(114, 286)	$10.33 \pm 0.06$	$0.13^{+0.04}_{-0.02}$ s	$0.29^{+0.13}_{-0.09}$ s	$0.30^{+0.13}_{-0.09}$ s	$0.12^{+0.05}_{-0.04}$ s
(113, 284)	$10.15 \pm 0.06$	$0.48^{+0.58}_{-0.17}$ s	$0.40^{+0.18}_{-0.12}$ s	$0.61^{+0.28}_{-0.19}$ s	$0.28^{+0.13}_{-0.09}$ s
(113, 283)	$10.26 \pm 0.09$	$100^{+490}_{-45}$ ms	$209^{+152}_{-87}$ ms	$150^{+111}_{-63}$ ms	$91^{+69}_{-39}$ ms
(113, 282)	$10.83 \pm 0.08$	$73^{+134}_{-29}$ ms	$8^{+5}_{-3}$ ms	$37^{+21}_{-13}$ ms	$75^{+44}_{-28}$ ms
(112, 285)	$9.29 \pm 0.06$	$34^{+17}_{-9}$ s	$49^{+26}_{-17}$ s	$82^{+44}_{-28}$ s	$23^{+12}_{-8}$ s
(112, 283)	$9.67 \pm 0.06$	$3.8^{+1.2}_{-0.7}$ s	$3.8^{+1.9}_{-1.2}$ s	$6.1^{+3.0}_{-2.0}$ s	$1.8^{+0.9}_{-0.6}$ s
(111, 280)	$9.87 \pm 0.06$	$3.6^{+4.3}_{-1.3}$ s	$0.49^{+0.22}_{-0.15}$ s	$2.6^{+1.2}_{-0.8}$ s	$6.0^{+2.9}_{-1.9}$ s
(111, 279)	$10.52 \pm 0.16$	$170^{+810}_{-80}$ ms	$10^{+16}_{-6}$ ms	$272^{+424}_{-163}$ ms	$110^{+177}_{-67}$ ms
(111, 278)	$10.89 \pm 0.08$	$4.2^{+7.5}_{-1.7}$ ms	$1.4^{+0.7}_{-0.5}$ ms	$6.3^{+3.5}_{-2.2}$ ms	$2.7^{+1.6}_{-1.0}$ ms
(110, 279)	$9.84 \pm 0.06$	$0.20^{+0.05}_{-0.04}$ s	$0.27^{+0.12}_{-0.08}$ s	$0.42^{+0.19}_{-0.13}$ s	$0.13^{+0.06}_{-0.04}$ s
(109, 276)	$9.85 \pm 0.06$	$0.72^{+0.97}_{-0.25}$ s	$0.12^{+0.05}_{-0.04}$ s	$0.63^{+0.29}_{-0.20}$ s	$0.29^{+0.14}_{-0.09}$ s
(109, 275)	$10.48 \pm 0.09$	$9.7^{+46}_{-4.4}$ ms	$3.0^{+2.0}_{-1.2}$ ms	$12.3^{+8.3}_{-4.9}$ ms	$6.7^{+4.6}_{-2.7}$ ms
(109, 274)	$9.95 \pm 0.10$	$440^{+810}_{-170}$ ms	$66^{+56}_{-30}$ ms	$341^{+296}_{-157}$ ms	$172^{+153}_{-80}$ ms
(108, 275)	$9.44 \pm 0.06$	$0.19^{+0.22}_{-0.07}$ s	$0.71^{+0.35}_{-0.23}$ s	$1.15^{+0.56}_{-0.38}$ s	$0.39^{+0.20}_{-0.13}$ s
(107, 272)	$9.15 \pm 0.06$	$9.8^{+11.7}_{-3.5}$ s	$2.3^{+1.2}_{-0.8}$ s	$13.3^{+6.9}_{-4.5}$ s	$7.0^{+3.7}_{-2.4}$ s
(107, 270)	$9.11 \pm 0.08$	$61^{+292}_{-28}$ s	$3.1^{+2.3}_{-1.3}$ s	$124^{+94}_{-53}$ s	$60^{+46}_{-26}$ s
(106, 271)	$8.67 \pm 0.08$	$1.9^{+2.4}_{-0.6}$ min	$0.49^{+0.40}_{-0.22}$ min	$1.45^{+1.20}_{-0.65}$ min	$1.67^{+1.41}_{-0.76}$ min

# Exemplo

❑ Vamos calcular a taxa de decaimento para o  $^{238}\text{U}$

$$\lambda = fT$$

$$f = \frac{\sqrt{2(V_0 + Q)/\mu}}{2R}$$

$$T = e^{-2G}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} Q_\alpha \approx 4.2 \text{ MeV} \\ V_0 \approx 30 \text{ MeV} \\ \mu = 4 \times 234/238 = 3.933 \text{ amu} \\ R = r_0 (A_d^{1/3} + A_\alpha^{1/3}) = 1.2(234^{1/3} + 4^{1/3}) = 9.3 \text{ fm} \end{array} \right.$$

$$f = \frac{c \times \sqrt{2(30 + 4.2)/(3.933 \times 931.5)}}{2 \times 9.3} = 2.20 \times 10^{21} / \text{s} \quad 2G = 2\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q_\alpha} (Z_\alpha Z_d e^2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$T = \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{1}{137} (2)(92) \sqrt{\frac{2(3.933)(931.5 \text{ MeV}/c^2)c^2}{4.2 \text{ MeV}}}\right) \approx 5.4 \times 10^{-39}$$

$$\lambda \approx 1.2 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1}$$



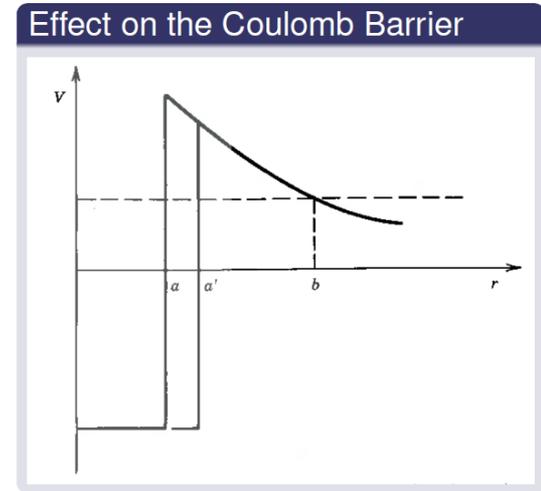
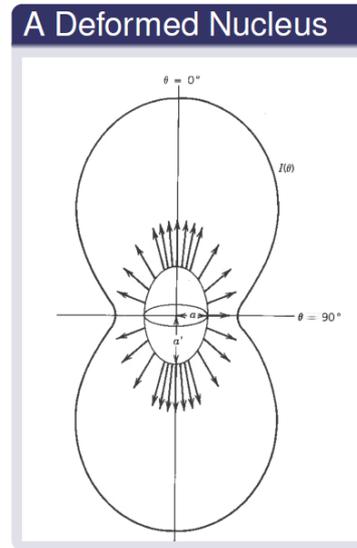
$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$t_{1/2} \approx 1.8 \times 10^9 \text{ yr} \quad \text{Calc}$$

$$4.5 \times 10^9 \text{ yr} \quad \text{Exp}$$

- ❑ Alguns autores consideram que o núcleo possui uma pre-formação de partículas alfa antes de decair (alfa clustering).
- ❑ Em nossos cálculos usamos que  $R=R_d+R_\alpha$ . No entanto, a partícula alfa pode estar mais afastada e o raio seria maior.
- ❑ Veja também que 2% de diferença no raio corresponde a um fator 2 no valor da taxa de decaimento.
- ❑ Para melhor o cálculo podemos usar  $R \approx 1.4A^{1/3}$
- ❑ Podemos ainda considerar o efeito de deformação e o efeito da barreira centrífuga. No entanto, esses efeitos são pequenos.

❑ Efeito devido a deformação

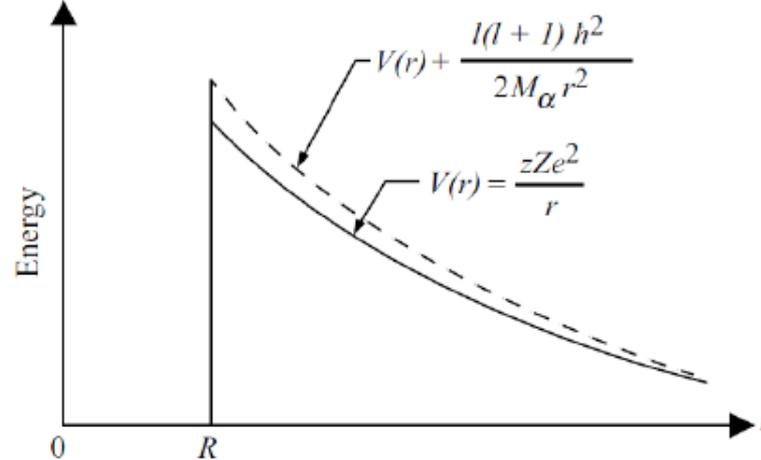


Source: Krane, Figures 8.9 and 8.10

❑ Efeito devido a rotação

$$V_e = \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2\mu R^2}$$

Loveland, Morrissey, & Seaborg, Modern Nuclear Chemistry (2006)



- ❑ O decaimento alfa deve obedecer a conservação do momento angular total e paridade.

#### The $\alpha$ Particle

- Pair of protons ( $Z = 2$ )
- Pair of neutrons ( $N = 2$ )
- $\implies J_{\alpha}^{\pi} = 0^{+}$

#### The Nuclei

- $Z$  protons,  $N$  neutrons (initial)
- $Z - 2$  protons,  $N - 2$  neutrons (final)
- Initial-state spin/parity  $J_i^{\pi_i}$
- Final-state spin/parity  $J_f^{\pi_f}$

$$|J_i - J_f| \leq \ell_{\alpha} \leq J_i + J_f$$

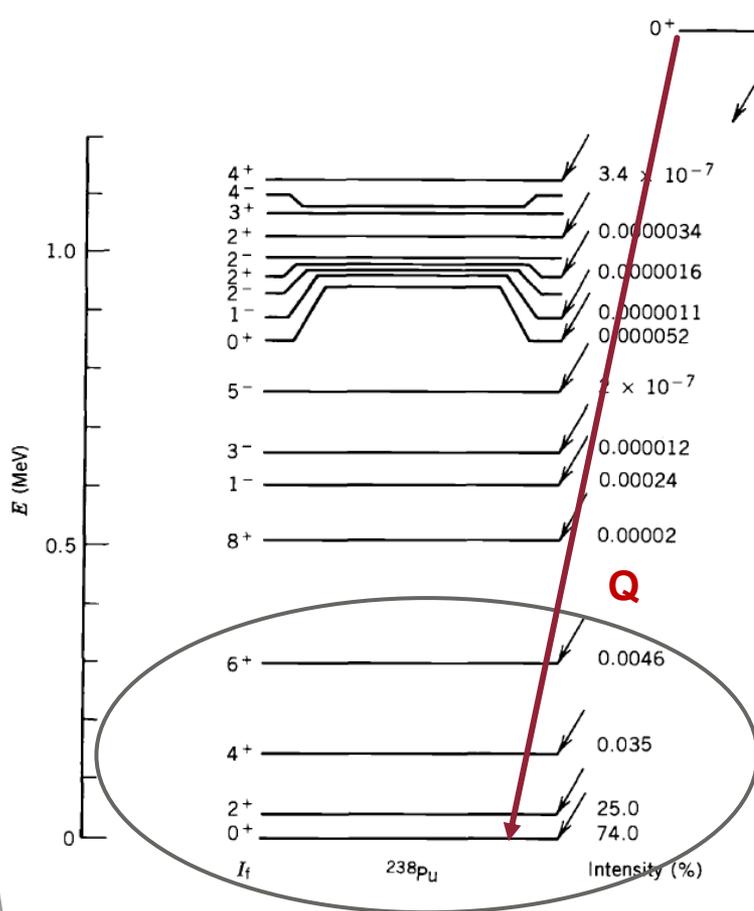
$$\pi_i = \pi_f (-1)^{\ell_{\alpha}}$$

- ❑ Se um núcleo com  $J^{\pi}=0^{+}$  decai, os estados finais possíveis no núcleo filho serão:

$$J^{\pi}=0^{+} \ (\ell=0) \qquad J^{\pi}=1^{-} \ (\ell=1) \qquad J^{\pi}=2^{+} \ (\ell=2)$$

- ❑ Nucleos par-par  $0^{+} \rightarrow 0^{+}$  tem maior probabilidade de decair por alfa.
- ❑ Partícula alfa com ( $\ell > 1$ ) significa que o potencial sentido pela partícula terá também uma barreira centrífuga. O potencial será maior e portanto, menor probabilidade de decair.

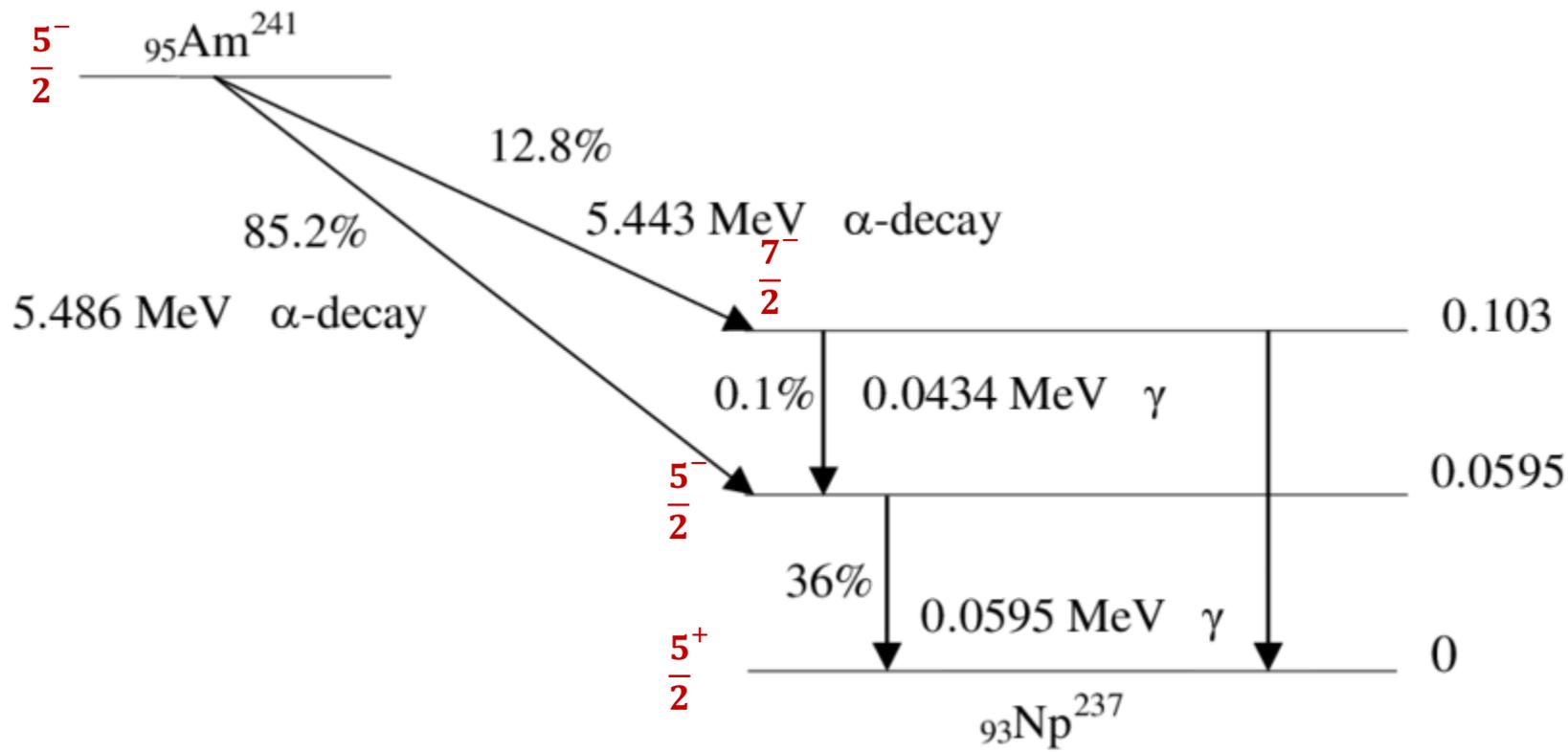
- ❑ Nucleos posicionados por diferença de massa.
- ❑ Estados excitados
- ❑ Q-de-reação é dado pela diferença de massa.

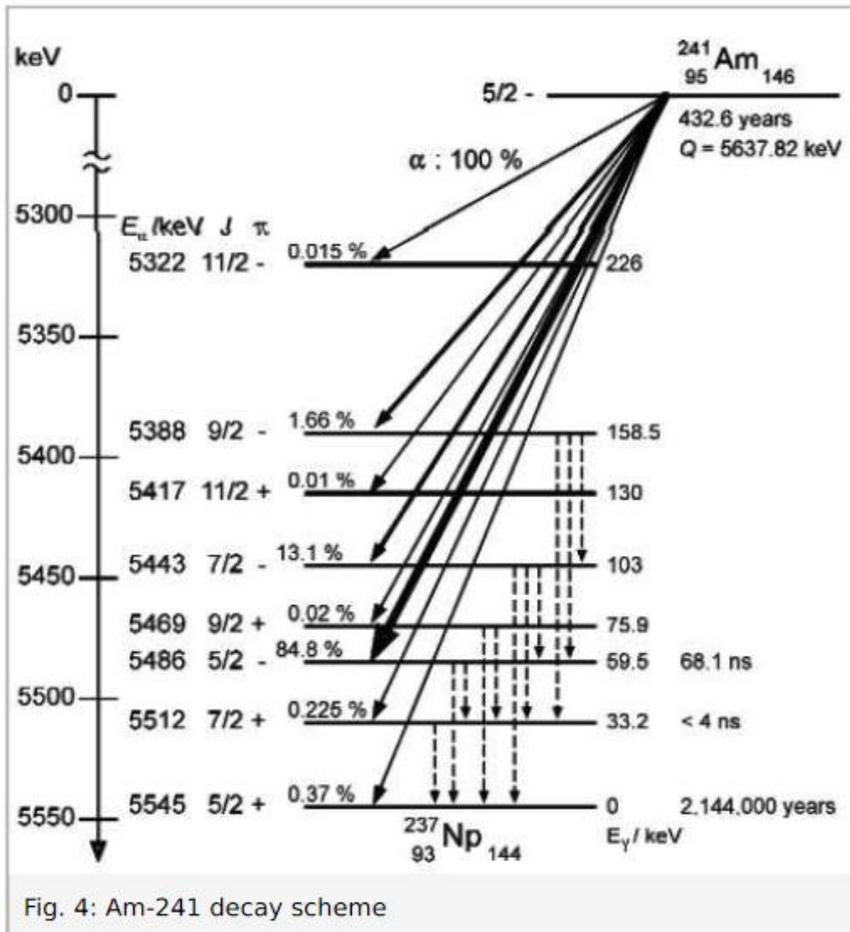


- ❑ Nucleos par-par com banda rotacional
- ❑ Maior probabilidade para decair para estados sem alteração de paridade.
- ❑ Além disso  $Q_\alpha$  grande aumenta a taxa de decaimento.

$$\lambda = fT$$

$$f = \frac{\sqrt{2(V_0 + Q)/\mu}}{2R}$$





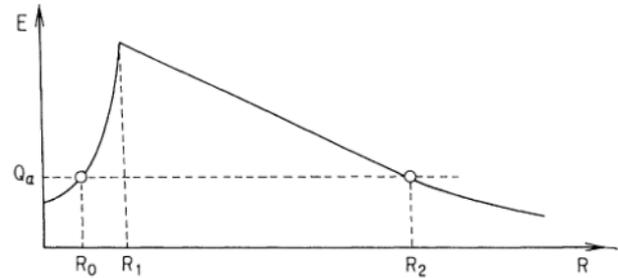
Reaction:  ${}^{241}_{95}\text{Am}_{146} \rightarrow {}^{237}_{93}\text{Np}_{144} + {}^4_2\text{He}_2 + \Delta E$

$\alpha$ -Energy/keV	Fraction/%	${}^{237}\text{Np}$ state/J $\pi$	$\gamma$ -Energy/keV
5544.5	0.37	5/2 +	-
5511.5	0.225	7/2 +	33.2
5485.6	84.8	5/2 -	59.5; 26.3
5469	0.02	9/2 +	75.8; 42.7
5442.8	13.1	7/2 -	103; 69.8; 43.4
5416.5	0.01	11/2 +	
5388	1.66	9/2 -	125.3; 99; 55.6
5322	0.015	11/2 -	

Alguns autores tentaram melhorar a formula de Geiger-Nuttal usando dados de decaimento disponíveis.

### Systematics of alpha decay half-lives

Yuichi Hatsukawa, Hiromichi Nakahara, and Darleane C. Hoffman  
 Phys. Rev. C **42**, 674 – Published 1 August 1990



$$\log_{10} T = A(Z) \times \left[ \frac{A_d}{A_p Q_\alpha} \right]^{1/2} \times [\arccos \sqrt{X} - \sqrt{X(1-X)}] - 20.446 + C(Z, N),$$

$$C(Z, N) = [1.94 - 0.020(82 - Z) - 0.070(126 - N)]$$

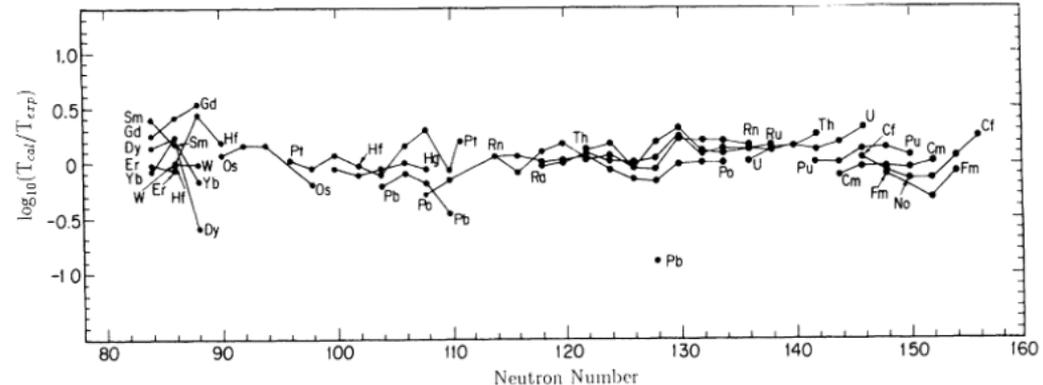
for  $78 \leq Z < 82, 100 \leq N < 126$

$$X = 1.2249(A_d^{1/3} + 4^{1/3}) \times \frac{Q_\alpha}{2Z_d e^2}$$

$$C(Z, N) = [1.42 - 0.105(Z - 82) - 0.067(126 - N)]$$

for  $82 < Z \leq 90, 110 \leq N \leq 126$

$$A(Z) = 1.40 \times Z + 1710/Z - 47.7$$



1) O  $^{239}\text{Pu}$  decai por emissão de partículas alfas com energia 5.144 MeV. Uma técnica para determinar a vida média desse decaimento é imergir uma certa quantidade de  $^{239}\text{Pu}$  num tanque de nitrogênio líquido (com uma quantidade de líquido suficiente para parar as partículas alfas). Podemos obter a vida média do decaimento a partir da taxa de evaporação do nitrogênio líquido devido a energia perdida pelas partículas alfas e energia de recuo do núcleo residual. Considerando que a taxa de evaporação é de 0.231W quando utilizamos 120.1 gramas de  $^{239}\text{Pu}$ , determine a vida média do decaimento. ( $2.39 \times 10^4$  anos)

**Exercício 1**

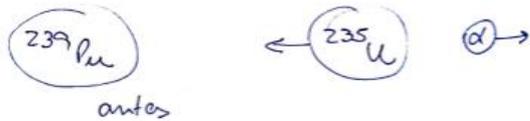
Decaimento do  $^{239}\text{Pu} \rightarrow ^{235}\text{U} + \alpha$

$E_\alpha = 5.144 \text{ MeV}$

Devemos obter quando de energia é fornecida para o mitogénio em cada decaimento.

$E = E_U + E_\alpha$

↓  
energia de recuo do Urânio



$E_U = \frac{1}{2} \frac{p_U^2}{M_U}$  mas  $p_U = p_\alpha$  (conservação momento)

$E_U = \frac{1}{2} \frac{p_\alpha^2}{M_U} = \frac{2 M_\alpha E_\alpha}{2 M_U} = \frac{4}{235} E_\alpha$

$E = E_U + E_\alpha = \frac{4}{235} E_\alpha + E_\alpha = \frac{239}{235} E_\alpha = \frac{239}{235} \times 5.144$

$E = 5.232 \text{ MeV}$

energia de cada decaimento.

1)

Taxe de evaporação do mitogénio

$P = 0.231 \text{ W} = 0.231 \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{0.231}{1.602 \times 10^{-19}} \frac{\text{eV}}{\text{s}}$

e cada decaimento fornece 5.232 MeV a taxa de decaimento é dada por:

$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{5.232 \times 10^6 \text{ eV}} = \frac{0.231}{1.602 \times 10^{-19}} \frac{1}{5.232 \times 10^6}$

$\frac{dN}{dt} = 2.756 \times 10^{11} \frac{1}{\text{s}}$

$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{dN}{dt} / N_0$

$N_0 \Rightarrow$  número de  $^{239}\text{Pu}$  iniciais.

$N_0 = \frac{120.1 \times 6.02 \times 10^{23}}{239} \quad \text{1 mol} = 6.02 \times 10^{23} \times \frac{239}{120.1}$

$N_0 = 3.025 \times 10^{23}$

$T_{1/2} = \frac{\ln 2 \cdot N_0}{\frac{dN}{dt}} = \frac{\ln 2 \times 3.025 \times 10^{23}}{2.756 \times 10^{11}} = 7.60 \times 10^4 \text{ s}$

$T_{1/2} = 2.4 \times 10^4 \text{ anos}$