Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 7

09/10/2023

Questão 1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear

$$T(1,0,0) = (1,1,0); \quad T(0,1,0) = (0,0,1); \quad T(0,0,1) = (1,-1,6),$$

a) Determine a dimensão do conjunto $Im(T)$. Usando o Teorema do Núcleo e Imagem, determine a dimensão do núcleo de T. T é injetora?

b) A aplicação T leva uma base de U em uma base de V. Por que podemos afirmar isso?

Solução: Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Portanto, $T(x,y,z) = (x+z, x-z, y+6z)$. Note ainda que a imagem de T contém 3 vetores L.I, isto é, os vetores do enunciado. Portanto, é sobrejetora. Como as dimensões dos espaços são finitas e iguais, isso implica que T é bijetora. A segunda afirmação é consequência do fato de que isomorfismos levam bases em bases. Ou seja, se $T : U \longrightarrow V$ é um isomorfismo e $B \subset V$ é uma base, então $T(B)$ também é uma base. (veja Corolário 8.34 da apostila do prof. Zani). Isso encerra a resolução do exercício.

Agora observe que se T é sobrejetora podemos afirmar que T leva uma base em um conjunto gerador, mas não necessariamente em uma base. Por exemplo, considere $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (x,y)$. O conjunto formado pelos vetores

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= (0,0) \\ T(0,1,0) &= (0,1) \\ T(1,0,0) &= (1,0) \end{aligned}$$

gera o $\mathbb{R}^2$, mas não é uma base.

■

Questão 2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1,0,0) = (2,3,1); \quad T(0,0,-1) = (5,2,7),$$

Responda as perguntas abaixo justificando devidamente.

a) Se $T(1,-1,0) = (0,0,1)$, determine $T(v)$ para $v \in \mathbb{R}^3$ arbitrário.

b) Nas condições anteriores, T é injetora, sobrejetora ou bijetora?

c) Refaça os itens anteriores supondo $T(1,-1,0) = (3,-1,6)$.

Solução A transformação T é definida na base $B = \{(1,0,0),(1,-1,0),(0,0,-1)\}$. Portanto, para encontrar a forma geral de T, devemos considerar a base canônica com coordenadas na base B:

$$(0,0,1) = -1.(0,0,-1) \Rightarrow T(0,0,1) = -(5,2,7)$$
$$(1,0,0) = 1.(1,0,0) \Rightarrow T(1,0,0) = (2,3,1)$$
$$(0,1,0) = 1.(1,0,0) + (-1).(1,-1,0) \Rightarrow T(0,1,0) = (2,3,1) - (0,0,1) = (2,3,0)$$

Assim, a forma geral de T é:

$$T(x,y,z) = x(2,3,1) + y(2,3,0) + z(-5,-2,-7) = (2x+2y-5z, 3x+3y-2z, x-7z).$$

Agora, note que os vetores imagem acima formam um conjunto L.I. Portanto, T é sobrejetora e, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, é também injetora.

Procedendo como anteriormente, a forma geral de T no caso do item c) é:

$$T(x,y,z) = x(2,3,1) + y(-1,4,-5) + z(-5,-2,-7) = (2x-y-5z, 3x+4y-2z, x-5y-7z).$$

Nesse caso, os vetores da imagem não são L.I, pois $(3,-1,6) = (5,2,7) - (2,3,1)$. Portanto, T não é sobrejetora. Quanto à injetividade, temos que $T(x,y,z) = (0,0,0)$ se, e somente se, (x,y,z) é solução do seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A matriz escalonada é $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e então o conjunto solução pode ser descrito como $\{(-2y, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$. Assim, o núcleo tem dimensão 1 e base $(-2,1,-1)$.

Questão 3. Sejam U, V espaços vetoriais tais que $\dim(U) > \dim(V)$. Se $T : U \longrightarrow V$ é uma transformação linear, mostre que T não é injetora. O que podemos dizer sobre a dimensão do núcleo de T?

Solução: Pelo teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim(U) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T))$. Suponha, por contradição, que T é injetora, então:

$$\dim(V) < \dim(U) = \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Ou seja, a imagem de T seria um subespaço de dimensão maior que a de V, o que gera um absurdo. Portanto, T não é injetora.

■

Questão 4. Dê um exemplo de transformação linear:

a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com $Ker(T) = \{(0,0,0)\}$;

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com $T(\mathbb{R}^3) = [(2,1,1),(1,-1,2)]$.
Dica: Atribua um vetor a cada uma das seguintes imagens: $T(1,0,0), T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$. Não pode ser qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$.

Solução: A condição do item 1 é equivalente a exibir uma transformação linear injetora. Como as dimensões são as mesmas, isso implica que a transformação é também um isomorfismo. Um exemplo é:

$$T(x, y, z) = (x, y, x + y + z).$$

Para o segundo item, podemos definir T na base canônica levando dois vetores canônicos para os dois gerados do enunciado. Mas o terceiro deve ter como imagem um vetor L.D com relação àqueles do enunciado. Apresentamos dois exemplos:

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= (2, 1, 1) \\ T(0, 1, 0) &= (1, -1, 2) \\ T(1, 0, 0) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= (2, 1, 1) \\ T(0, 1, 0) &= (1, -1, 2) \\ T(1, 0, 0) &= (3, 0, 3), \end{aligned}$$

visto que $(3, 0, 3) \in [(2, 1, 1), (1, -1, 2)]$.

$\blacksquare$