Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 6

02/10/2023

Para as questões abaixo serão necessárias as seguintes definições:

- Uma aplicação $T : U \longrightarrow V$ é *injetora* se para todos $u_1, u_2 \in U$, $T(u_1) = T(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$.
- Uma aplicação $T : U \longrightarrow V$ é *sobrejetora* se para todo $v \in V$, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$.
- Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Indicamos por $\text{Ker}(T)$ e chamamos *núcleo* de T o conjunto

$$\text{Ker}(T) = \{u \in U; T(u) = 0\}.$$

Questão 1. Verifique se as aplicações abaixo são lineares. Dentre estas, determine quais são injetoras e quais são sobrejetoras.

a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - y - z)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ x & 0 \end{pmatrix}$.

Solução: Considere a primeira transformação. Para linearidade, temos que:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) + T(u,v,w) &= (x+y, x-y-z) + (u+v, u-v-w) \\ &= ((x+y)+(u+v), (x+u-v-y)-(z+w)) \\ &= T(x+u, y+v, z+w) \end{aligned}$$

Além disso, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned} \lambda T(x,y,z) &= (\lambda(x+y), \lambda(x-y-z)) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y - \lambda z) \\ &= T(\lambda(x,y,z)) \end{aligned}$$

Note ainda que $T(0,0,1) = (0,-1)$ e $T(0,1,0) = (1,-1)$. Esses vetores formam uma base de $\mathbb{R}^2$ e portanto geram todo o espaço. Por outro lado, ambos pertencem a $\text{Im}(T)$. Portanto, T é sobrejetora. Por fim, como $T(1,-1,2) = (0,0)$, o núcleo de T tem dimensão maior que 0 e T não é injetora.

A segunda transformação também é linear e a prova é semelhante a anterior e não a repetiremos. Afirmamos que T não é sobrejetora. De fato, o vetor $(1,0,0) \notin \text{Im}(T)$, pois o sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

não tem solução. Por outro lado, se $T(x,y) = (0,0,0)$, então $(x,y) = (0,0)$, de maneira que o núcleo consiste apenas do zero e T é injetiva.

A terceira transformação não é linear, pois:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) + T(u,v,w) &= \begin{pmatrix} 1 & -y \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -v \\ u & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -y-v \\ x+u & 0 \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} 1 & -y-v \\ x+u & 0 \end{pmatrix} \\ &= T(x+u, y+v, z+w) \end{aligned}$$

■

Questão 2. Mostre que o núcleo de uma transformação linear $T : U \longrightarrow V$ é um subespaço vetorial de U. Qual a relação entre injetividade e o núcleo?

Solução: Devemos verificar os axiomas de subespaço vetorial. Já sabemos que $T(0) = 0$ e, portanto, o zero pertence ao núcleo. Temos ainda que:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0; \\ T(\lambda.u) &= \lambda.T(u) = \lambda.0 = 0 \end{aligned}$$

para quaisquer $u, v \in \mathrm{Ker}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos a seguinte relação entre o núcleo e a injetividade de uma aplicação linear:

Uma aplicação linear $T : U \longrightarrow V$ é injetiva se, e somente se, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

■

Questão 3. Determine a dimensão e uma base para o núcleo das transformações lineares abaixo. O que se pode dizer sobre a injetividade e a sobrejetividade?

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (0, x+y, 0)$

b) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x, y, z+w)$.

Solução: Note na primeira transformação que $T(x,y) = (0,0,0)$ se, e somente se, $x = -y$, de maneira que:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Uma base é $B = \{(1,-1)\}$, logo, $\dim\mathrm{Ker}(T) = 1$. Isso implica que T não é injetiva. Note que qualquer vetor na imagem de T tem a primeira e segunda coordenadas nulas, de maneira que T não é sobrejetora.

Para a segunda transformação, temos que:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x, y, z+w) = (0,0,0)$$

implica $x = y = 0$ e $z = -w$. Assim:

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & -z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma base é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, logo, $\dim\mathrm{Ker}(T) = 1$. Dado $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, o seguinte sistema sempre possui solução:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z + w = \gamma.$$

Por exemplo, tome $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ e $z = 0$. Isso resulta que T é sobrejetora.

$\blacksquare$