# “Solucionário” de exercícios sugeridos

## Preparativos para a P1 (Matemática III)

Se encontrar algo errado ou estranho aqui, não hesite em apontar :)

**1.** Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

**Resposta:** Podemos escrever $v \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ como $v = a+b\sqrt{2}$ para $a, b \in \mathbb{Q}$. Então valem as sete propriedades de espaços vetoriais:

i. Fechamento por adição:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

ii. Fechamento por multiplicação por escalar:

$$\alpha(a + b\sqrt{2}) = \alpha a + \alpha b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

iii. Comutatividade:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \\ &= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt{2} \\ &= (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2})\end{aligned}$$

iv. Associatividade: Muita conta... Segue da associatividade em $\mathbb{Q}$.

v. Existência do elemento neutro da soma: $\exists 0 = (0 + 0\sqrt{2})$ tal que $v + 0 = 0$ para todo $v \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

vi. Existência do elemento neutro da multiplicação: $\exists 1 = (1 + 0\sqrt{2})$ tal que $1v = v$ para todo $v \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

vii. Distributivas:

$$(\alpha + \beta)(a + b\sqrt{2}) = \alpha(a + b\sqrt{2}) + \beta(a + b\sqrt{2})$$

$$\alpha[(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] = \alpha(a_1 + b_1\sqrt{2}) + \alpha(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

Então $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

**2.** Suponha que estejam definidas no conjunto $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a, b > 0\}$ as seguintes operações:

1. $(a,b) \oplus (c,d) = (ac, bd)$, para todo $(a,b), (c,d) \in V$.
2. $\alpha(a,b) = (a^\alpha, b^\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $(a,b) \in V$.

Prove que $V$, munido dessas operações, é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

**Resposta:** A demonstração é parecidíssima com a questão 1.

i. $(a,b) \oplus (c,d) = (ac, bd)$ tal que $ac, bd > 0$, então $(ac, bd) \in V$.

ii. $\alpha(a,b) = (a^\alpha, b^\alpha)$ tal que $a^\alpha, b^\alpha > 0$, então $(a^\alpha, b^\alpha) \in V$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii. $(a,b) \oplus (c,d) = (ac, bd) = (ca, db) = (c,d) \oplus (a,b)$, pois a multiplicação usual em $\mathbb{R}$ é comutativa, logo a adição é comutativa.

iv. $(a,b) \oplus ((c,d) \oplus (e,f)) = \ldots = ((a,b) \oplus (c,d)) \oplus (e,f)$, pois a multiplicação usual em $\mathbb{R}$ é associativa, logo a adição é associativa.

v. Existe o elemento neutro da soma. Nesse caso, é $0 = (1,1)$, pois

$$(a,b) \oplus (1,1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a,b).$$

vi. Existe o elemento neutro da multiplicação, $1 \in \mathbb{R}$, pois

$$1(a,b) = (a^1, b^1) = (a,b).$$

No entanto, percebam que $0 = (1,1) \in V$ é diferente de $1 \in \mathbb{R}$.

vii. Distributivas:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(a,b) &= (a^{\alpha+\beta}, b^{\alpha+\beta}) \\ &= (a^\alpha a^\beta, b^\alpha b^\beta) \\ &= (a^\alpha, b^\alpha) \oplus (a^\beta, b^\beta) \\ &= \alpha(a,b) \oplus \beta(a,b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha[(a,b) \oplus (c,d)] &= \alpha(ac, bd) \\ &= (a^\alpha c^\alpha, b^\alpha d^\alpha) \\ &= (a^\alpha, b^\alpha) \oplus (c^\alpha, d^\alpha) \\ &= \alpha(a,b) \oplus \alpha(c,d)\end{aligned}$$

**3.** Sob que condições impostas ao escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ os vetores $(0,1,\alpha)$, $(\alpha,0,1)$ e $(1+\alpha,1,\alpha)$ formam uma base de $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$?

**Resposta:** Lembrem que, para ser uma base, um conjunto precisa ser l.i. e seus vetores devem gerar o espaço em questão. Para $\mathscr{B} = \{(0,1,\alpha),(\alpha,0,1),(1+\alpha,1,\alpha)\}$ ser l.i., o sistema

$$a(0,1,\alpha) + b(\alpha,0,1) + c(1+\alpha,1,\alpha) = (0,0,0)$$

deve ter apenas a solução trivial $a = b = c = 0$. Temos então um sistema de três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} b\alpha + c + c\alpha = 0 \\ a + c = 0 \\ a\alpha + b + c\alpha = 0 \end{cases}$$

Espero que fique claro que $a = -c$ implica à terceira equação que $b = 0$, tal que chegamos a

$$c(1+\alpha) = 0.$$

Primeiro, $c = 0 \implies a = 0$ e resgatamos a solução trivial; sobra $(1+\alpha) = 0$, tal que $\alpha = -1$ nos leva a uma solução não trivial. Portanto, para que $\mathscr{B}$ seja l.i., $\alpha \neq -1$.

Como $\mathscr{B}$ tem 3 vetores e a dimensão de $\mathbb{C}^3$ é 3, então $\mathscr{B}$ é base de $\mathbb{C}^3$.

Mas eu sou meio burrinho, então eu esqueci que existia esse teorema. Segue uma resolução meio burrinha, só porque eu me esforcei pra isso; *não façam igual.* É muito mais fácil usar a propriedade que $\mathscr{B}$ tem 3 vetores e é l.i., então é base de $\mathbb{C}^3$.

Precisamos garantir que cada entrada de um vetor em $\mathbb{C}^3$ é um complexo. O jeito mais fácil que eu consegui para mostrar foi montar os vetores unitários $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a partir dos vetores de $\mathscr{B}$,

$$(1,0,0) = \frac{1}{1+\alpha}\left\{(1+\alpha,1,\alpha) - (0,1,\alpha)\right\},$$

$$(0,1,0) = (0,1,\alpha) - \alpha(\alpha,0,1) + \alpha^2(1,0,0),$$

$$(0,0,1) = (\alpha,0,1) - \alpha(1,0,0).$$

Assim, qualquer entrada pode ser dada a partir de uma combinação linear desses vetores unitários com escalares em $\mathbb{C}$, gerando vetores em $\mathbb{C}^3$. Como os vetores unitários podem ser formados a partir de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ é conjunto gerador de $\mathbb{C}^3$. Como $\mathscr{B}$ é l.i. e conjunto gerador, então é base. Ufa.

**4.** Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial de todas as funções do tipo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Prove que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é linearmente independente em $V$, onde $f_1, f_2, f_3$ são dadas por $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ e $f_3(x) = e^{-ix}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

**Resposta:** Buscamos mostrar que a solução trivial é a única possível. Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$, pois $V$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial,

$$\begin{aligned} af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) &= 0 \\ a + be^{ix} + ce^{-ix} &= 0 \\ a + b\cos x + bi \sin x + c\cos(-x) + ci\sin(-x) &= 0, \end{aligned}$$

tal que $\cos(-x) = \cos x$ e $\sin(-x) = -\sin x$, então

$$a + (b + c)\cos x + (b - c)i \sin x = 0.$$

Para que o termo imaginário se anule para todo $x \in \mathbb{R}$, $b = c$. Caso $b = c = 0$, então $a = 0$ e caimos na solução trivial. Então, assumindo $b \neq 0$,

$$a + 2b\cos x = 0 \implies \cos x = -\frac{a}{2b} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja, $\cos x$ precisaria ser uma função constante. Segue que a solução trivial é a única possível.

**5.** Seja $\mathcal{B} = \{(i, 1 - i, 2), (2, 1, -i), (5 - 2i, 4, -1 - i)\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}^3$. Considere tanto $\mathbb{C}^3$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{R}$.
(a) $\mathcal{B}$ é um conjunto l.i.?

**Resposta:** Precisamos mostrar que

$$\alpha(i, 1 - i, 2) + \beta(2, 1, -i) + \gamma(5 - 2i, 4, -1 - i) = 0$$

só tem solução trivial $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} i\alpha + 2\beta + 5\gamma - 2i\gamma = 0 \\ \alpha - i\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha - i\beta - \gamma - i\gamma = 0, \end{cases}$$

vemos que é a única solução possível. Então $\mathcal{B}$ é l.i.

(b) Decida se $(3 + i, 4, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}$.

**Resposta:** Um subconjunto l.i. de um espaço vetorial $V$ com número de elementos $n = \dim V$ é base de $V$. Portanto, sendo $\mathcal{B}$ li, é base de $\mathbb{C}^3$, então qualquer vetor de $\mathbb{C}^3$ pode ser gerado por $\mathcal{C}$. Em particular, $(3+i, 4, 2)$ é gerado por $\mathcal{B}$.

**6.** Verifique se $S$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $V$ sobre o corpo $K$ em questão nos seguintes casos:

(a) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $S = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x = 0\}; K = \mathbb{R}$

(b) $V = \mathbb{R}^n$ e $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \cdot a_2 = 0\}; K = \mathbb{R}$

(c) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $S = \{f \in V; f(0) = f(1)\}; K = \mathbb{R}$

**Resposta:** Para ser um subespaço vetorial, $S$ precisa ter o vetor nulo, ser fechado pela adição ou ser fechado pela multiplicação por escalar.

(a) Existe vetor nulo, que é a função $f(x) \equiv 0$. Além disso, os vetores em $S$ são tais que $f(x) = 0$ no intervalo $[0, 1]$, como podem ler **neste link**. Então é fechado por adição, pois

$$\int_0^1 (f(x) + g(x))^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 ([)0 + 0)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 0 \, \mathrm{d}x = 0.$$

Além disso, é fechado por multiplicação, pois

$$\int_0^1 (\alpha f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \alpha^2 \int_0^1 (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

Portanto, esse é um subespaço vetorial.

(b) Existe vetor nulo, $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Mas ele não é fechado por adição,

$$a + b = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, a_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

pois

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) = \underbrace{a_1 a_2}_{=0} + a_1 b_2 + b_1 a_2 + \underbrace{b_1 b_2}_{=0} = a_1 b_2 + b_1 a_2,$$

o que não necessariamente é zero. Veja que se $a_1 = b_2 = 0$, mas $a_2 = b_1 \neq 0$, então $a, b \in S$ e

$$a_1 b_2 + b_1 a_2 = b_1 a_2 \neq 0$$

Então não é um subespaço vetorial.

(c) Existe vetor nulo, $f(x) \equiv 0$. A soma é fechada,

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = f(1) + g(1) = (f+g)(1),$$

e a multiplicação é fechada,

$$(\alpha f)(0) = \alpha(f(0)) = \alpha(f(1)) = (\alpha f)(1).$$

Então é um subespaço vetorial.

**7. (extra)** Sejam $F_1, F_2$ subespaços de $V$. Mostre que $F_1 \cap F_2$ é um subespaço de $V$.

**Resposta:** Lembrem que, se $F_1 e F_2$ são subespaços vetoriais de $V$, então ambos possuem o elemento neutro da soma 0. Portanto, $F_1 \cap F_2$ também possui 0. Basta mostrar o fechamento por soma e o fechamento por multiplicação por escalar.

Primeiro, para quaisquer $u, v \in F_1 \cup F_2$, temos que $u, v \in F_1$ e $u, v \in F_2$, então segue do fechamento por soma nesses dois subespaços que $u+v \in F_1$ e $u+v \in F_2$, portanto $u+v \in F_1 \cap F_2$.

Segundo, para qualquer escalar $\alpha \in K$ e qualquer vetor $v \in F_1 \cap F_2$, temos que $v \in F_1$ e que $v \in F_2$. Então $\alpha v \in F_1$ e $\alpha v \in F_2$, portanto $\alpha v \in F_1 \cap F_2$.

**8.** Sejam $W_1$ e $W_2$ subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V$.

(a) Dê um exemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ pode não ser subespaço de $V$.

**Resposta:** Considerem $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{w \in \mathbb{R}^2 : w = (x,0)\}$ e $W_2 = \{w \in \mathbb{R}^2 : w = (0,y)\}$. Ou seja, considerem os eixos $x$ e $y$ do $\mathbb{R}^2$.

É fácil ver que $W_1$ e $W_2$ são espaços vetoriais (análogos à reta $\mathbb{R}$), mas qualquer vetor $(x,0) + (0,y) = (x,y)$ para $x, y \neq 0$ não está no conjunto $W_1 \cup W_2$. Assim, essa união não forma um subespaço fechado por soma, portanto, não forma um subespaço vetorial.

(b) Prove que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de $V$ se e somente se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

**Resposta:** Sem perda de generalidade (SPG), suponhamos $W_1 \subseteq W_2$. Então $W_1 \cup W_2 = W_2$, tal que $W_2$ é subespaço, então a união também é subespaço. Logo $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$ implica que $W_1 \cup W_2$ é subespaço.

Suponhamos então que $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V. Se $W_1 \subsetneq W_2$, então existe ao menos um vetor $w_1 \in W_1$ que não pertence a $W_2$, mas pertence a

$W_1 \cup W_2$. Similarmente, existe ao menos um vetor $w_2 \in W_2$ que não pertence a $W_1$, mas pertence a $W_1 \cup W_2$. Equivalentemente, podemos dizer que para nenhuma base de $W_2$ podemos gerar $w_2$, assim como para nenhuma base de $W_1$ podemos gerar $w_1$.

Portanto, se $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V, esperamos que a soma seja fechada, $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, o que significa que $w_1 + w_2 \in W_1$ e/ou $w_1 + w_2 \in W_2$. No primeiro caso, a existência do inverso da adição de $w_1$ implica que

$$(w_1 + w_2) - w_1 = (w_1 - w_1) + w_2 = w_2 \in W_1,$$

mas tinhamos definido que $w_2 \notin W_1$, o que é uma contradição. Sobra o segundo caso, tal que a existência do inverso da adição de $w_2$ implica que

$$(w_1 + w_2) - w_2 = w_1 + (w_2 - w_2) = w_1 \in W_2,$$

mas novamente chegamos a uma contradição. Segue que, caso $W_1 \subsetneq W_2$ ou $W_2 \subsetneq W_1$, $W_1 \cup W_2$ não é fechado por adição, então não pode ser um subespaço vetorial. Portanto $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V somente se $W_1 \subsetneq W_2$ ou $W_2 \subsetneq W_1$.

**9. (extra)** Encontre o conjunto solução de $\begin{cases} 2x + y - 7z = 0 \\ \quad\quad y + 2z = 0 \end{cases}$.

**Resposta:** A segunda equação nos dá que $y = -2z$. Colocando na primeira,

$$2x - 2z - 7z = 0 \implies 2x - 9z = 0 \implies x = \frac{9}{2}z,$$

então nosso conjunto de soluções é

$$S = \{\alpha \left(\frac{9}{2}, -2, 1\right) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

**10.** Seja

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) : a_{11} + a_{12} = 0 \right\}.$$

(a) Mostre que $W$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

**Dica:** Mostrem que valem as 7 propriedades de espaços vetoriais, como no começo da lista.

(b) Determine uma base de $W$.

**Resposta:** Se não houvesse restrição, a base seria

$$\mathscr{B}_{\text{sem restrição}} = \{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\}$$

mas, considerando a restrição $a_{11} + a_{12} = 0$, encontramos a base de $W$ como

$$\mathscr{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & -i\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\right\}$$

(c) Seja $W_1 = \{(a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) : a_{21} = -\overline{a_{12}}\}$. Prove que $W_1$ é um subespaço de V sobre $\mathbb{R}$ e ache uma base de $W_1$.

**Resposta:** Lembrem que precisamos encontrar três coisas para caracterizar um subconjunto como subespaço: existência do zero, fechamento por adição e por multiplicação por escalar.

Primeiro, o elemento zero existe, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. O fechamento por adição $A+B = C$ segue do fechamento por adição usual dos complexos e observando que a condição do conjunto é satisfeita,

$$c_{21} = a_{21} + b_{21} = -\overline{a_{12}} - \overline{b_{12}} = -(\overline{a_{12} + b_{12}}) = -\overline{c_{12}}.$$

Similarmente, o fechamento por multiplicação $\alpha\mathbb{C}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ segue do fechamento por multiplicação usual dos complexos e de que

$$c_{21} = \alpha a_{21} = -\alpha\overline{a_{12}} = -(\overline{\alpha a_{12}}) = -\overline{c_{12}},$$

pois $\overline{\alpha} = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.