Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #20

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

31/10/2023

Princípio da Energia Complementar Mínima

- Para resolução de estruturas hiperestáticas

- Graus de hiperestaticidade:

$$g = m - n$$

$m \rightarrow$ número de reações vinculares

$n \rightarrow$ número de equações de equilíbrio

- Energia complementar como função de g incógnitas vinculares *independentes (incógnitas hiperestáticas):*

$$U^* = U^*(R_1, R_2, \dots, R_g)$$

- Pelo teorema de *Crotti-Engesser:*

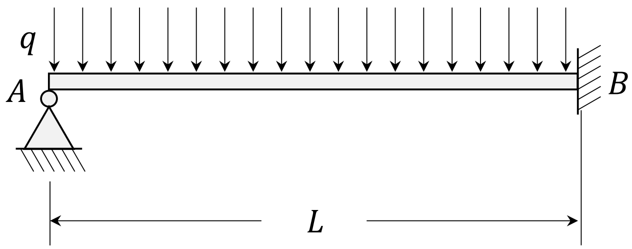
$$\frac{\partial U^*}{\partial R_i} = 0$$

Exemplo

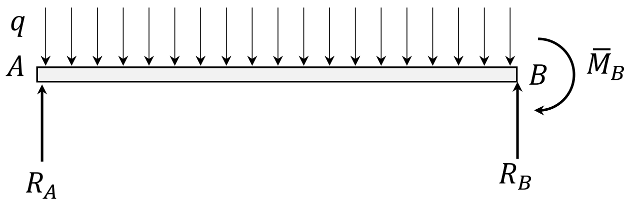
A barra prismática da figura está apoiada em A e engastada em B. Ela tem rigidez flexional EI, comprimento L e está submetida a uma força uniformemente distribuída de magnitude q. Pede-se:

a) Calcular as reações vinculares;

b) Calcular a rotação no ponto A.



a) ▪ *DCL:*



▪ *Equilíbrio:*

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow R_A + R_B = qL$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_A L + \bar{M}_B = \frac{qL^2}{2}$$

$$m = 3 \qquad n = 2 \qquad \Rightarrow g = 1$$

▪ *Incógnita hiperestática:*

vou escolher R_A

▪ *Energia complementar:*

$$U^* = U^*(R_A)$$

▪ *Princípio da Energia Complementar Mínima:*

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_A} = 0$$

▪ *Na forma modificada:*

$$\int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial R_A} dx = 0$$

- *Momento fletor apenas em função da incógnita hiperestática R_A*

$$M(x) = R_A\, x - \frac{qx^2}{2}$$

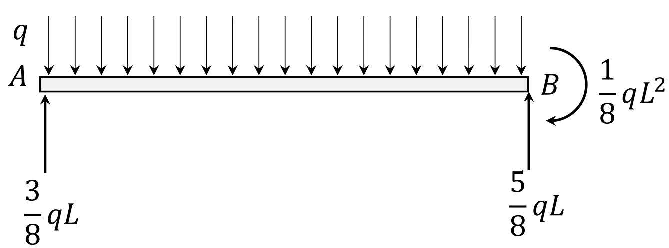
$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\int_0^L \left(R_A\, x - \frac{qx^2}{2}\right) x\, dx = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3}{8} qL$$

- *Das equações de equilíbrio:*

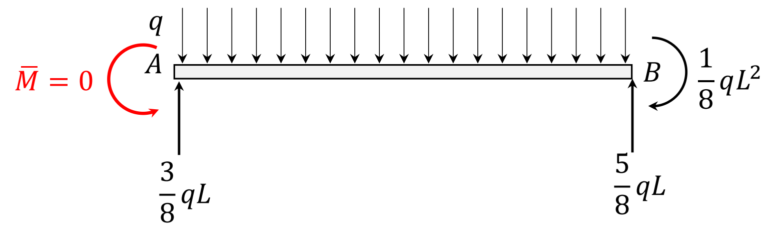
$$R_B = \frac{5}{8} qL \qquad \bar{M}_B = \frac{1}{8} qL^2$$

- *DCL após o cálculo das reações:*



b) *Cálculo da rotação*

- *Colocando um momento fictício:*



- *Pelo Teorema de Crotti-Engesser:*

$$\theta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}}\right)_{\bar{M}=0} \qquad \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}}\right)_{\bar{M}=0} dx$$

$$M(x) = -\bar{M} + \frac{3ql}{8} x - \frac{qx^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\bar{M} - \frac{3ql}{8} x + \frac{qx^2}{2}\right)_{\bar{M}=0} dx$$

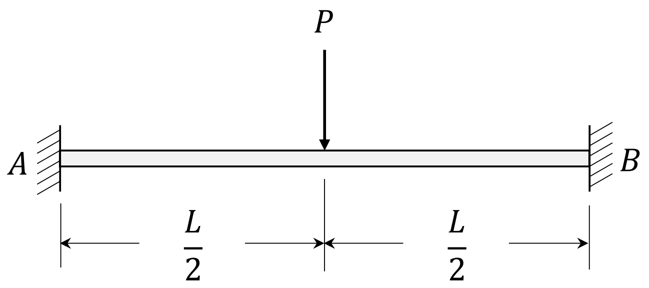
$$\Rightarrow \theta = -\frac{qL^3}{48EI}$$

Exercício

A barra prismática da figura está engastada em A e em B. Ela tem rigidez flexional EI, comprimento L e está submetida a uma força concentrada P aplicada ao seu ponto médio. Pedem-se, para o ponto médio da barra:

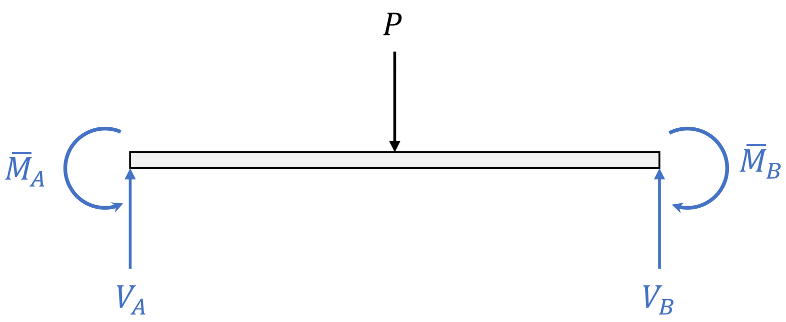
a) o deslocamento vertical;

b) a rotação.

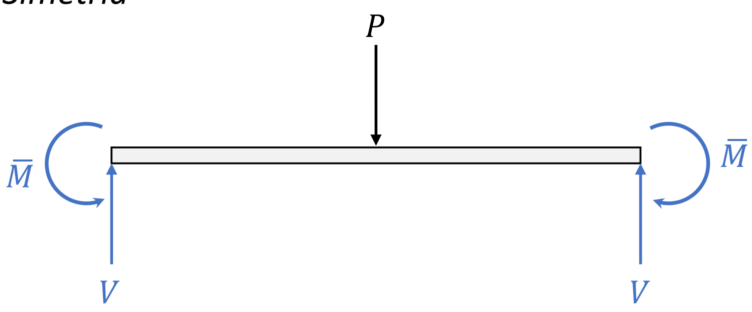


a)

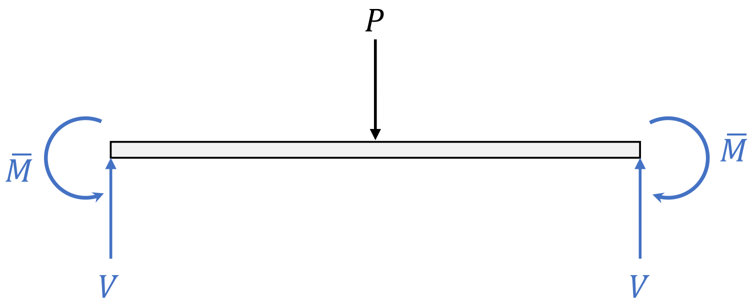
- *DCL*



- *Simetria*



- *Equilíbrio:*



$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V + V - P = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\bar{M} = ?$$

- *Grau de hiperestaticidade:*

$$g = 1$$

- *Incógnita hiperestática:*

$$\bar{M}$$

- Teorema da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} = 0 = \frac{2}{EI}\int_0^{L/2} M(x)\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}dx$$

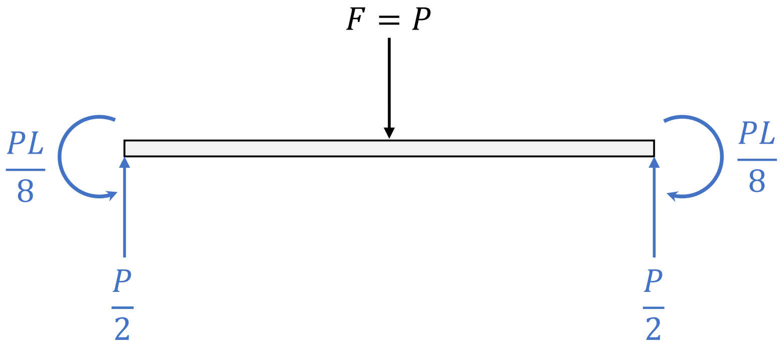
$$M(x) = \frac{P}{2}x - \bar{M}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{EI}\int_0^{L/2}\left(\bar{M} - \frac{P}{2}x\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \frac{PL}{8}$$

- Deslocamento vertical do ponto médio:



$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{2}{EI}\int_0^{L/2} M(x)\frac{\partial M}{\partial P}dx$$

$$M(x) = \frac{P}{2}x - \frac{PL}{8} = \frac{P}{8}(4x - L)$$

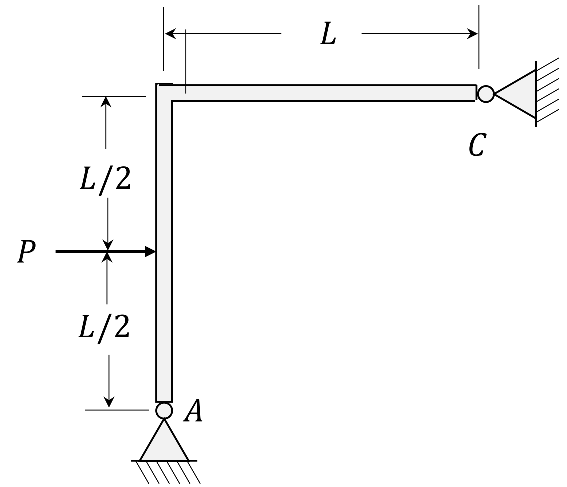
$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{1}{8}(4x - L)$$

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

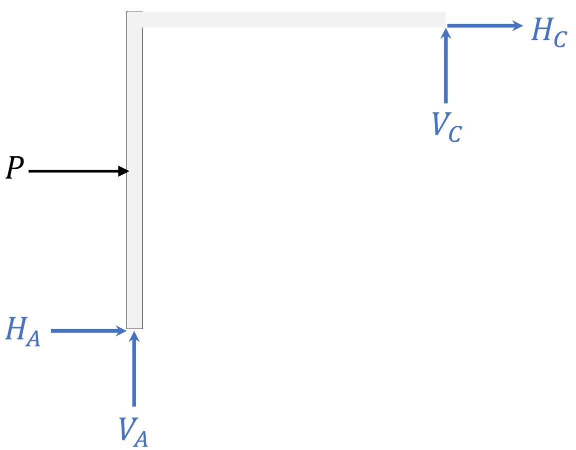
b) Pela simetria, a rotação do ponto médio será nula!

Exercício:

O pórtico da figura é formado por barras prismáticas com rigidez flexional EI. Calcular as reações, desprezando o efeito da força normal.



- *DCL*



- *Grau de hiperestaticidade:*

$$g = 1$$

- *Equilíbrio:*

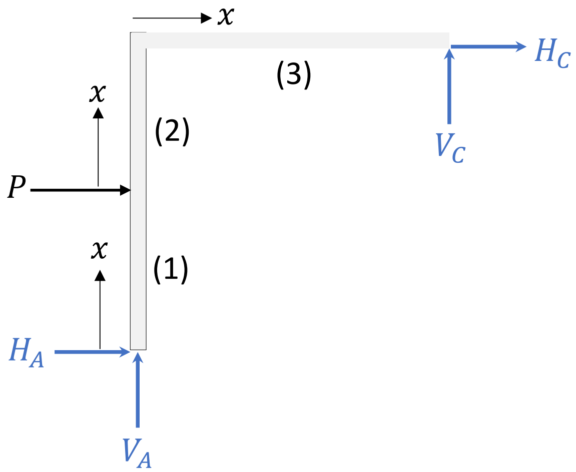
$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C + P = 0$$
$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0$$
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A L - V_A L + P\frac{L}{2} = 0$$

- *Incógnitas hiperestáticas independentes:*

Vou escolher H_A

- *Princípio da Energia Complementar Mínima:*

$$\frac{\partial U^*}{\partial H_A} = 0 \Rightarrow \int_0^{L/2} M_1(x)\frac{\partial M_1}{\partial H_A}dx + \int_0^{L/2} M_2(x)\frac{\partial M_2}{\partial H_A}dx \int_0^{L} M_3(x)\frac{\partial M_3}{\partial H_A}dx = 0$$



$$M_1(x) = -H_A x \qquad \frac{\partial M_1}{\partial H_A} = -x$$

$$M_2(x) = -H_A\frac{L}{2} - (H_A + P)x \qquad \frac{\partial M_2}{\partial H_A} = -\left(\frac{L}{2} + x\right)$$

$$M_3(x) = -H_A L - P\frac{L}{2} + V_A x \qquad V_A = H_A + \frac{P}{2}$$

$$M_3(x) = -H_A L - P\frac{L}{2} + H_A x + \frac{P}{2}x \qquad \frac{\partial M_3}{\partial H_A} = -L + x$$

$$\Rightarrow H_A = -\frac{13}{32}P$$

- *As outras reações são calculadas a partir das equações de equilíbrio:*

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C + P = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A L - V_A L + P\frac{L}{2} = 0$$

$$H_A = -\frac{13}{32}P \quad \Rightarrow H_C = -\frac{19}{32}P \quad \Rightarrow V_A = \frac{3}{32}P \Rightarrow V_C = -\frac{3}{32}P$$

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar.* Disponível no Moodle