



Sistemas Inteligentes

UNIDADE 7 – Sistemas Fuzzy (Introdução à Lógica Fuzzy)

Prof. Ivan Nunes da Silva



1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Aspectos de definição

- **Definição 1:** São sistemas que tentam explorar as formas que o cérebro usa para o tratamento de informações qualitativas e incertas.
- **Definição 2:** São sistemas que suportam os modos de raciocínio que são aproximados, ao invés de exatos, como estamos naturalmente acostumados a trabalhar.
- **Definição 3:** São sistemas capazes de tratar informações vagas, aproximadas, as quais são expressas por regras linguísticas.
- **Definição 4:** São sistemas que consistem em aproximar a decisão computacional da decisão humana.



1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Principais características dos sistemas fuzzy

- Exploram a riqueza da informação:
 - Informações qualitativas.
 - Redes neurais artificiais só trabalha com informações quantitativas.
- Permitem expressar imprecisões e incertezas (Exemplo da Churrascaria).
- O raciocínio é executado de forma aproximada (não exata).
- Independem da modelagem matemática.
- Sistemas baseados em regras linguísticas.



3

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Vantagens dos sistemas fuzzy

- Conceitualmente fácil de ser entendida.
- Flexibilidade explícita pela tolerância à imprecisão de dados.
- Modelagem não-linear de processos com complexidade arbitrária.
- Construída baseado na experiência dos especialistas.
- Pode ser integrada com outras ferramentas convencionais.
- Baseada em linguagem natural.



4

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Resumo histórico

- **1965 → Conceitos de conjuntos fuzzy**
 - Publicação do artigo “Fuzzy Sets”.
- **1974 → Primeira aplicação em controle**
 - Realizada por Mamdani (*Queen Mary College, UK*).
 - Tentativas foram frustradas com utilização de PID.
- **1987 → Projeto de sistemas fuzzy dedicados (Hitachi)**
 - Aplicação no metrô de Sendai (Japão).
 - Controle de aceleração, parada e frenagem.
- **1988 → Surgimento de chips fuzzy**
- **1992 → Realização do primeiro congresso internacional**
- **1993 → Início da primeira publicação relevante**
 - *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.

5

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

O conceito de inexatidão

- O cérebro humano processa informações inexatas de forma direta:
 - Hoje está **mais ou menos** quente.
 - O show é **meio** caro.
 - Aquele rapaz é **baixinho**.
 - Coloque **um pouco** (uma pitada) de sal.
 - A tensão está **muito alta**.
 - Picanha **bem passada**.
- Mas, paradoxalmente, não há incerteza sobre a eventual quantificação do valor que se quer representar (ou repassar a ideia).
- O problema é como definir “linguisticamente” esse valor.

6

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Exemplo do jogo de golfe

- Se a bola está **longe** do buraco e o terreno está **levemente inclinado** da esquerda para direita, bata na bola **fortemente** e numa direção **um pouco a esquerda** da bandeira.
- Se a bola está **muito perto** do buraco e o terreno é **plano**, bata na bola **suavemente** e **diretamente na direção** do buraco.
- Como se pode definir a distância:
 - **Muito Perto**: menor que 1 metro
 - **Perto**: entre 1 e 3 metros
 - **Médio**: entre 3 e 5 metros
 - **Longe**: entre 5 e 7 metros
 - **Muito Longe**: maior que 7 metros
- Como classificar a distância 4.99 metros?
- Intuitivamente, sabe-se que 4.99 está mais para "**Longe**" do que para "**Médio**".



7

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Lógica clássica e lógica fuzzy

- Na **lógica clássica tradicional** (teoria de conjuntos), as fronteiras dos conjuntos são bem definidas.
- Na **lógica fuzzy** (nebulosa), essas fronteiras não são bem definidas, sendo então flexíveis.



8

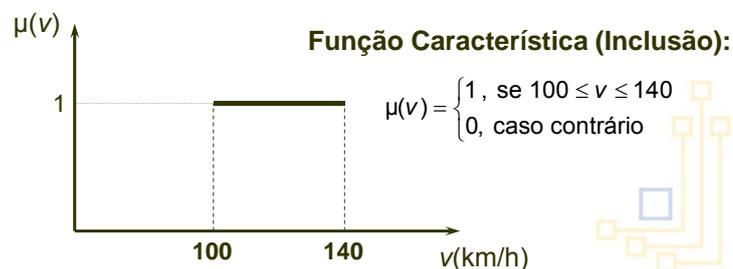
2. Conceitos de Lógica Clássica

Resumo da lógica clássica de conjuntos

- Na lógica clássica (booleana, binária, Aristóteles), os objetos **pertencem** ou **não** a uma determinada classe ou a um determinado conjunto.
- A resposta se resume a “Sim” ou “Não”, “Verdadeiro” ou “Falso”, 0 ou 1, etc.

- **Exemplo:**

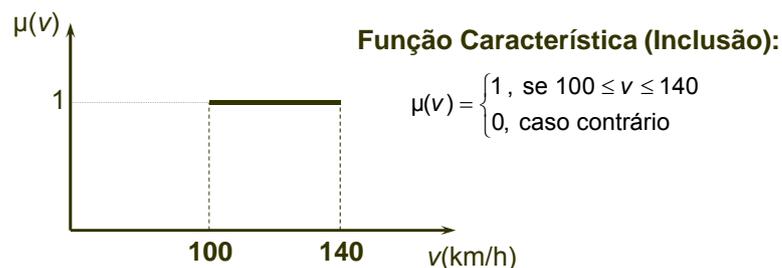
➤ Seja o seguinte gráfico denotando o conceito de “**Velocidade Alta**”.



9

2. Conceitos de Lógica Clássica

Aspectos de seleção dos limiares



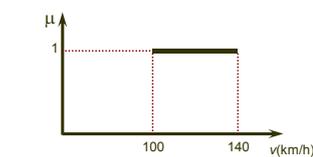
- Qual a resposta da função característica para uma velocidade de 99,9999 km/h?
- A imprecisão e a incerteza do mundo real acaba restringindo a aplicação da lógica clássica em problemas do dia-a-dia.
- **Princípio da Incompatibilidade de Zadeh** → À medida que a complexidade de um sistema aumenta, a habilidade para se fazer afirmações precisas e que sejam significativas também diminui.

10

2. Conceitos de Lógica Clássica

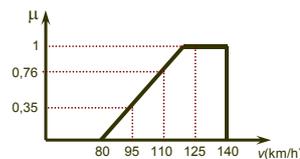
Aspectos comparativos

- Representação gráfica do conceito de “Velocidade Alta”:



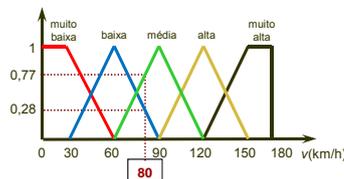
Lógica Clássica

objetos **pertencem** ou **não** a uma determinada classe
(como tratar paradoxos? Monte de areia, mentiroso, todo-poderoso, desconhecido, barbeiro, etc.)



Lógica Fuzzy

objetos podem **pertencer mais** (ou **menos**) a uma determinada classe
(não é probabilidade! Exemplo das garrafas do gênio)



Sistema Fuzzy

Variáveis representadas por funções de pertinência

11

2. Conceitos de Lógica Clássica

Paradoxo do Barbeiro

- Placa na Porta da Barbearia: “Faço a barba de todos os homens da cidade que não se barbeiam sozinhos, e somente desses.”
- Quem fará então a barba do barbeiro levando em conta a placa da barbearia?
- Se ele próprio se barbear, pertencerá ao grupo dos que se barbeiam sozinhos, como é óbvio. Mas a placa diz expressamente que ele nunca faz a barba de ninguém pertencente a esse grupo. Portanto, não pode barbear a si próprio. Se é outra pessoa que faz a barba do barbeiro, então ele é um homem que não se barbeia sozinho. Mas a placa diz que ele faz a barba de todos os homens desta categoria. Assim, mais ninguém pode fazer a barba do barbeiro.



12

3. Conceitos de Lógica Fuzzy

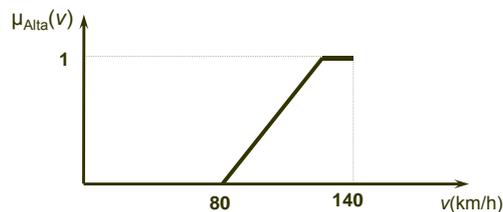
Função de pertinência na lógica fuzzy

- Na lógica fuzzy, a ideia da função de inclusão é então flexibilizada, indicando que os objetos podem pertencer mais, ou menos, a um determinado conjunto.
- Neste caso, a função de inclusão ao conjunto fuzzy, ou **função de pertinência**, é dada pela seguinte expressão:

$$\mu_A(x) : x \rightarrow [0, 1] ; \text{ onde } x \in X$$

➤ onde $\mu_A(x)$ retorna o **grau de pertinência** do elemento x , pertencente ao **universo de discurso** X , em relação ao **conjunto fuzzy** A .

- Como exemplo, considera-se aqui na figura um conjunto fuzzy que define o conceito de velocidade alta.



13

3. Conceitos de Lógica Fuzzy

Terminologia para representar conjuntos fuzzy

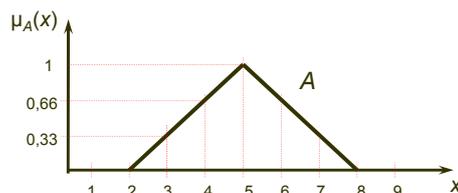
- Em termos de implementação computacional, os conjuntos fuzzy são normalmente representados de maneira discreta.
- Para um conjunto fuzzy A , discreto e finito, tendo elementos definidos em um universo de discurso X , o mesmo conjunto pode ser denotado da seguinte forma:

$$A = \mu_A(x_1) / x_1 + \mu_A(x_2) / x_2 + \mu_A(x_3) / x_3 + \dots + \mu_A(x_n) / x_n$$

- Onde o sinal de adição indica a composição de todos elementos do conjunto A , e n especifica a quantidade de elementos de discretização.
- Então, cada termo $\mu_A(x_i) / x_i$ fornece o grau de pertinência $\mu_A(x_i)$ do elemento x_i em relação ao conjunto fuzzy A .

- Como exemplo, o conjunto fuzzy A , dado pela função de pertinência ilustrada no gráfico, poderia ser representado por:

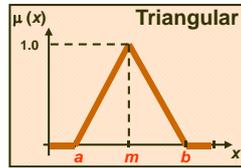
$$A = 0,0 / 1 + 0,0 / 2 + 0,33 / 3 + 0,66 / 4 + 1,0 / 5 + 0,66 / 6 + 0,33 / 7 + 0,0 / 8 + 0,0 / 9$$



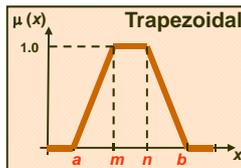
14

3. Conceitos de Lógica Fuzzy

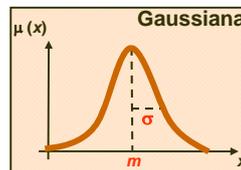
Principais tipos de funções de pertinência



$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } x \in [a, m] \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{se } x \in [m, b] \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$



$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } x \in [a, m] \\ 1, & \text{se } x \in [m, n] \\ \frac{b-x}{b-n}, & \text{se } x \in [n, b] \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$



$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



15

4. Operações com Conjuntos Fuzzy

União entre conjuntos fuzzy

Conjunto UNIÃO

- O conjunto **UNIÃO**, entre dois conjuntos fuzzy A e B, pertencentes a um mesmo universo de discurso X, é formado por todos os valores **máximos** entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x) \cup \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

- Generalizando, para uma coleção de m conjuntos fuzzy, todos definidos num mesmo universo de discurso X, tem-se:

$$\bigcup_{i=1}^m \mu_{A_i}(x) = \max\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_m}(x)\}$$

- Outros operadores de **UNIÃO**:

Soma Algébrica $\Rightarrow \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

Soma Limitada $\Rightarrow \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$

Soma Drástica $\Rightarrow \begin{cases} \mu_A(x), & \text{se } \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x), & \text{se } \mu_A(x) = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$



16

Qual a vantagem de se utilizar o operador "Máximo" na União?

4. Operações com Conjuntos Fuzzy

Interseção entre conjuntos fuzzy

Conjunto INTERSEÇÃO

- O conjunto **INTERSEÇÃO**, entre dois conjuntos fuzzy A e B , pertencente a um universo de discurso X , é formado por todos os valores **mínimos** entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

- Generalizando, para uma coleção de m conjuntos fuzzy, todos definidos num mesmo universo de discurso X , tem-se:

$$\bigcap_{i=1}^m \mu_{A_i}(x) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_m}(x)\}$$

- Outros operadores de **INTERSEÇÃO**:

$$\text{Produto Algébrico} \Rightarrow \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

$$\text{Produto Limitado} \Rightarrow \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$$

$$\text{Produto Drástico} \Rightarrow \begin{cases} \mu_A(x), & \text{se } \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x), & \text{se } \mu_A(x) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

T-normas

Qual a vantagem de se utilizar o operador “Mínimo” na Interseção?

17

4. Operações com Conjuntos Fuzzy

Conjunto complemento, S-Norma e T-Norma

Conjunto COMPLEMENTO

- O conjunto **COMPLEMENTO** de um conjunto nebuloso A , pertencente a um universo de discurso X , é formado pela subtração de $\mu_A(x)$ do valor unitário 1. Formalmente, tem-se:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Operador S-Norma

- Uma **S-norma** (co-norma triangular) é uma operação matemática binária, $S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $x \ S \ 1 = 1$, sendo que $x \ S \ 0 = x$ (**Condição de contorno**)
2. $x \ S \ y = y \ S \ x$ (**Propriedade Comutativa**)
3. $x \ S \ (y \ S \ z) = (x \ S \ y) \ S \ z$ (**Propriedade Associativa**)
4. Se “ $x \leq y$ ” e “ $w \leq z$ ”, então “ $x \ S \ w \leq y \ S \ z$ ” (**Monotonicidade**)

Operador T-Norma

- Uma **T-norma** (norma triangular) é uma operação matemática binária, $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$; que deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $x \ T \ 1 = x$, sendo que $x \ T \ 0 = 0$ (**Condição de contorno**)
2. $x \ T \ y = y \ T \ x$ (**Propriedade Comutativa**)
3. $x \ T \ (y \ T \ z) = (x \ T \ y) \ T \ z$ (**Propriedade Associativa**)
4. Se “ $x \leq y$ ” e “ $w \leq z$ ”, então “ $x \ T \ w \leq y \ T \ z$ ” (**Monotonicidade**)

Constata-se então que o max é uma S-norma e o min é uma T-norma.

18

4. Operações com Conjuntos Fuzzy

Exemplos de operações

Exemplo 1

- Sejam os conjuntos fuzzy A e B , definidos no universo de discurso $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com graus de pertinência dados por:

$$A = 0.2/1 + 0.5/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.1/5$$

$$B = 0.1/1 + 1.0/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.3/5$$

Calcule as seguintes operações:

a) $\mu_A \cup \mu_B = 0.2/1 + 1.0/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.3/5$

b) $\mu_A \cap \mu_B = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.1/5$

c) $\mu_{\bar{A}} = 0.8/1 + 0.5/2 + 0.0/3 + 0.2/4 + 0.9/5$

Exemplo 2

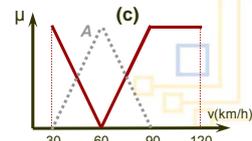
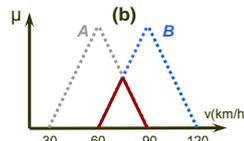
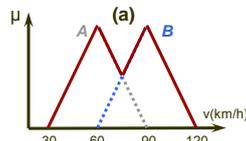
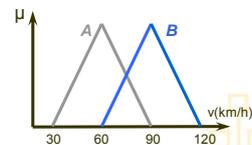
- Sejam os conjuntos fuzzy A e B , representados na figura ao lado. Faça as seguintes operações:

a) $\mu_A \cup \mu_B$

b) $\mu_A \cap \mu_B$

c) $\mu_{\bar{A}}$

Universo de Discurso
 $V \in [30, 120]$



19

5. Aspectos de Projeto

Discussões sobre utilização de sistemas fuzzy

Aspectos de Projeto

- Todos os conjuntos fuzzy relacionados à uma variável específica devem ser sempre compostos pelos mesmos elementos do respectivo universo de discurso.
- A representação discreta dos conjuntos fuzzy é aquela normalmente utilizada para aplicações práticas.
- As expressões analíticas das funções de pertinência são utilizadas apenas para produzir os vetores que serão utilizados para representar a forma discreta dos números fuzzy.

Quando Usar Sistemas Fuzzy

- Em situações em que se dispõe de pouca informação quantitativa a respeito do processo a ser mapeado.
 - Se dispuser de um conjunto de informações quantitativas (medições) relacionando entradas/saídas, as redes neurais pode ser também uma alternativa de uso.
- Em situações em que as variáveis do processo estão imersas em ambientes de incerteza e imprecisão.
- Em situações em que o processo é melhor definido tendo-se como base o conhecimento especialista sobre o processo.
 - Especialista (Expert)** → É aquele indivíduo que possui a capacidade elaborar diagnósticos ou recomendações sobre o processo, por meio da utilização de termos incertos/imprecisos.

20