SLC 641 – Óptica

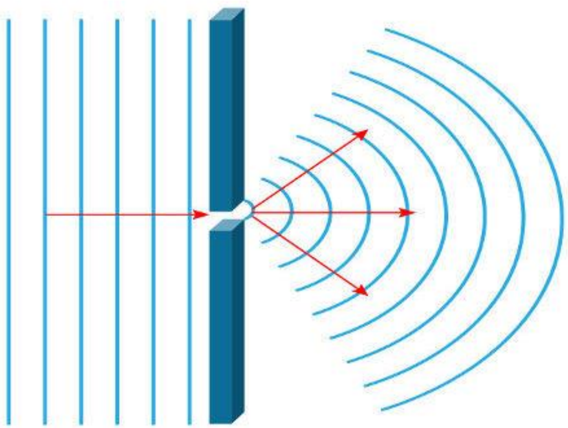
Licenciatura em Ciências Exatas – São Carlos

Aula 8
Difração Revisão

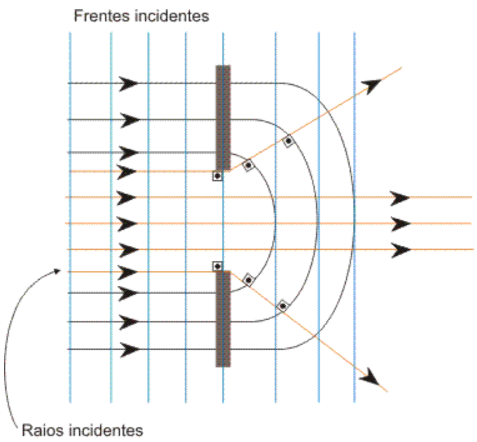
39/10/2023

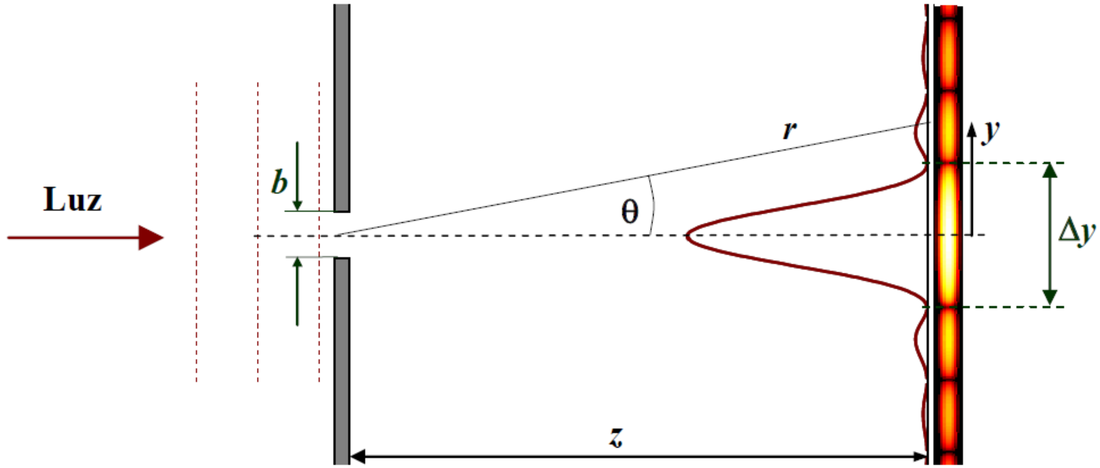
Difração

Fenda pequena

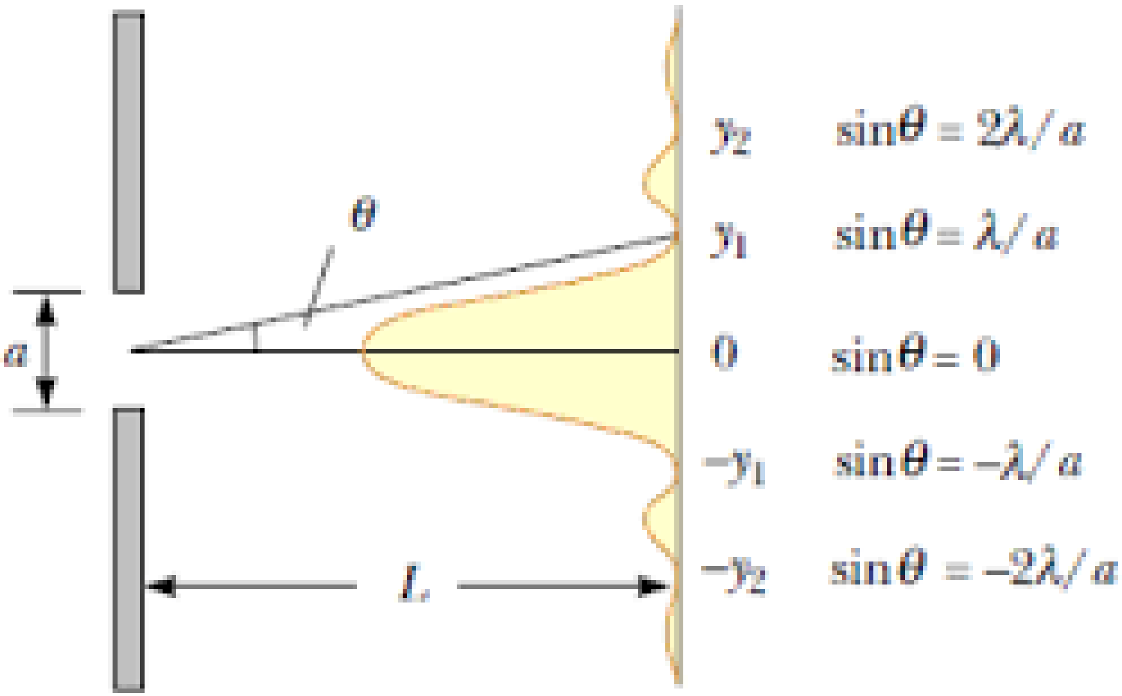


Fenda grande



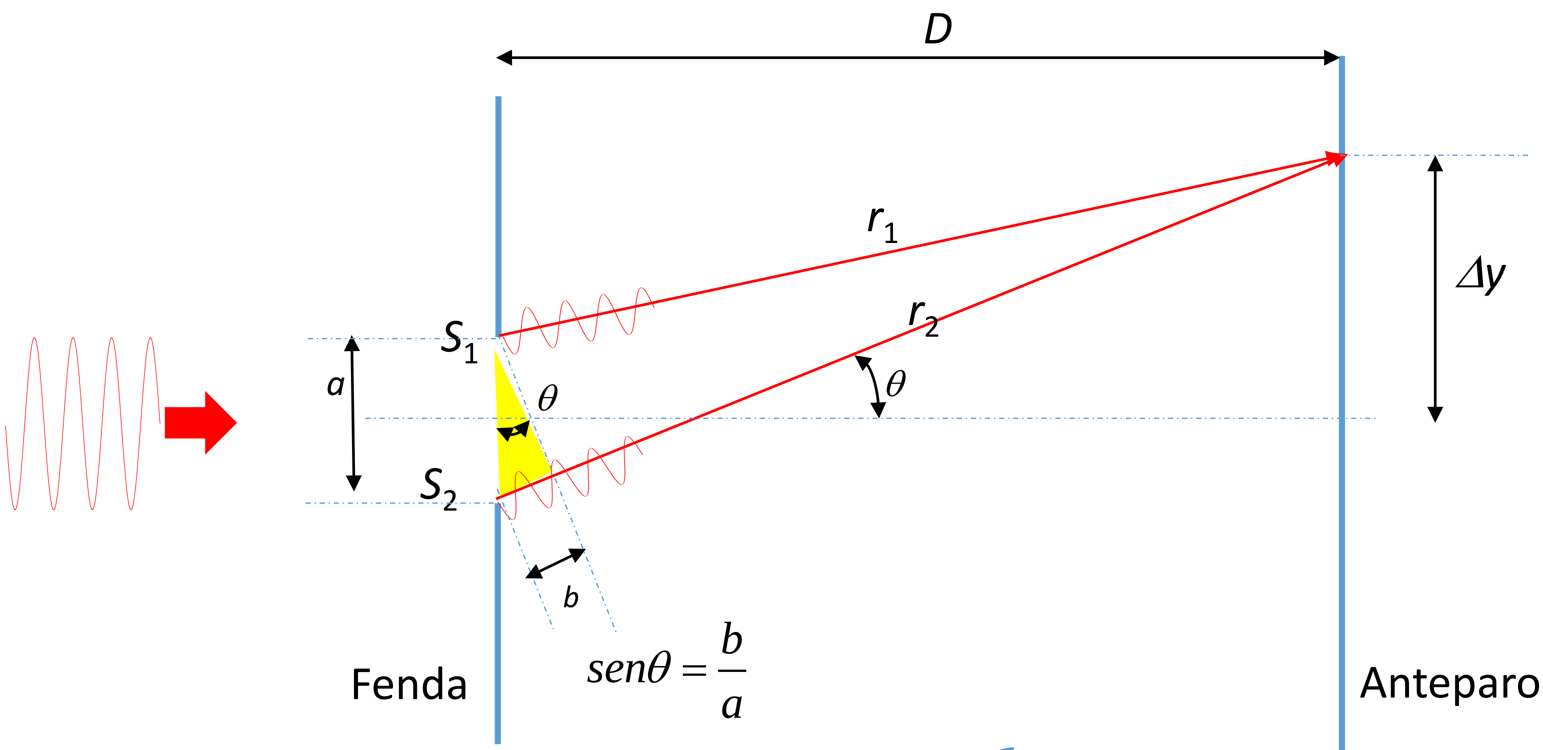


Difração numa fenda



Difração numa fenda

Podemos escrever em termos de fase ϕ, para qualquer ângulo θ:



Fase=Comp. em num. de Ondas x 2π ⇒ $\phi = \frac{b}{\lambda} 2\pi$ ⇒

$$b = a\ \text{sen}\theta$$

$$\phi = \left(\frac{a sen\theta}{\lambda}\right) 2\pi$$

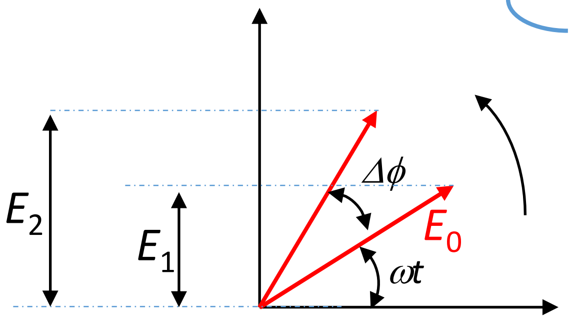
⇒ $$\phi = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) sen\theta$$

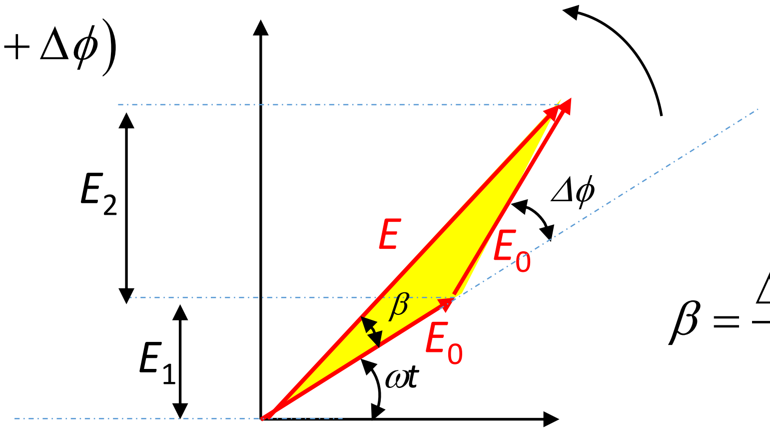
Difração numa fenda

Vamos usar o modelos de Fasor (método geométrico) para determinar o padrão de difração (cálculo quantitativo)

Apenas duas fontes:

$$E = E_1\left[S_1\right] + E_2\left[S_2\right] \quad \begin{cases} E_1 = E_0 sen\ \omega t \\ E_2 = E_0 sen\ \left(\omega t + \Delta\phi\right) \end{cases}$$





$$\beta = \frac{\Delta\phi}{2}$$

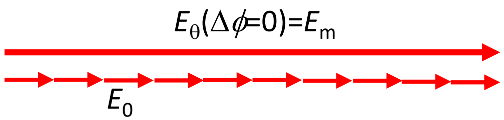
$$\cos\beta = \frac{E/2}{E_0} \Rightarrow E = 2\left(E_0 \cos\beta\right)$$

$$E = 2\left(E_0 \cos\frac{\Delta\phi}{2}\right) \Rightarrow I = 4I_0 \cos^2\frac{\Delta\phi}{2}$$

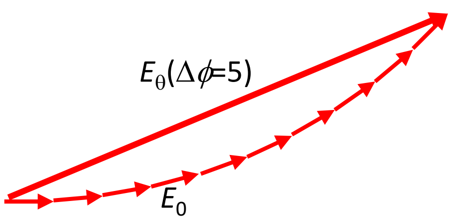
Difração numa fenda

Vamos usar o modelos de Fasor (método geométrico) para determinar o padrão de difração (cálculo quantintativo)

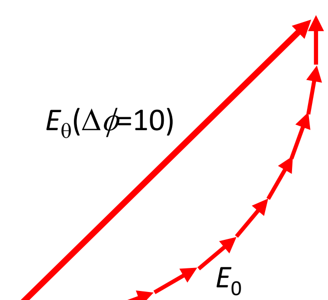
No caso de m fontes: Ex: m=10



Máximo central, θ=0

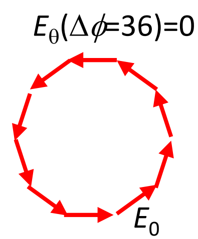


Direção θ um pouco fora da direção central

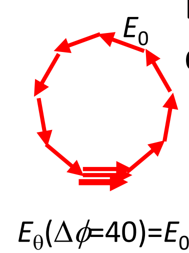


Direção θ um mais fora da direção central

Primeiro mínimo



Direção um pouco depois do mínimo

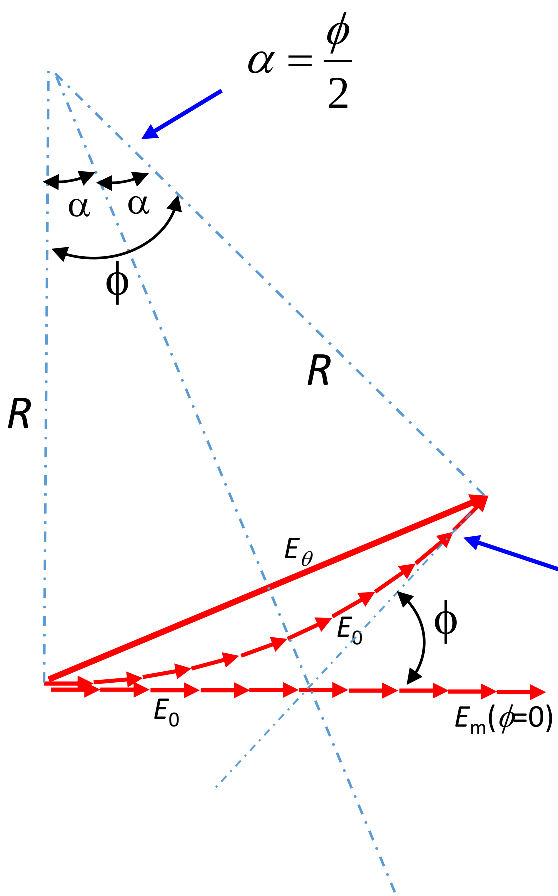


Fase total

$$\phi = m\Delta\phi$$

Difração numa fenda

Vamos usar o modelos de Fasor (método geométrico) para determinar o padrão de difração (cálculo quantitativo)



$$sen\alpha = \frac{E_\theta / 2}{R} = \frac{E_\theta}{2R} = sen\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$E_\theta = 2R sen\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Comprimento do arco $= \phi R = E_m$ ⇒ $R = \frac{E_m}{\phi}$

$$E_\theta = \frac{2E_m}{\phi} sen\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{E_m}{(\phi/2)} sen\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Difração numa fenda

Vamos usar o modelos de Fasor (método geométrico) para determinar o padrão de difração (cálculo quantitativo)

$$E_\theta = \frac{2E_m}{\phi} sen\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{E_m}{(\phi/2)} sen\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Intensidade é o campo ao quadrado:

$$(E_\theta)^2 = \frac{(E_m)^2}{(\phi/2)^2} sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$I = I_m \frac{sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\phi}{2}\right)^2}$$

$$I = I_m \left(\frac{sen\alpha}{\alpha}\right)^2$$

Função Sinc ao quadrado

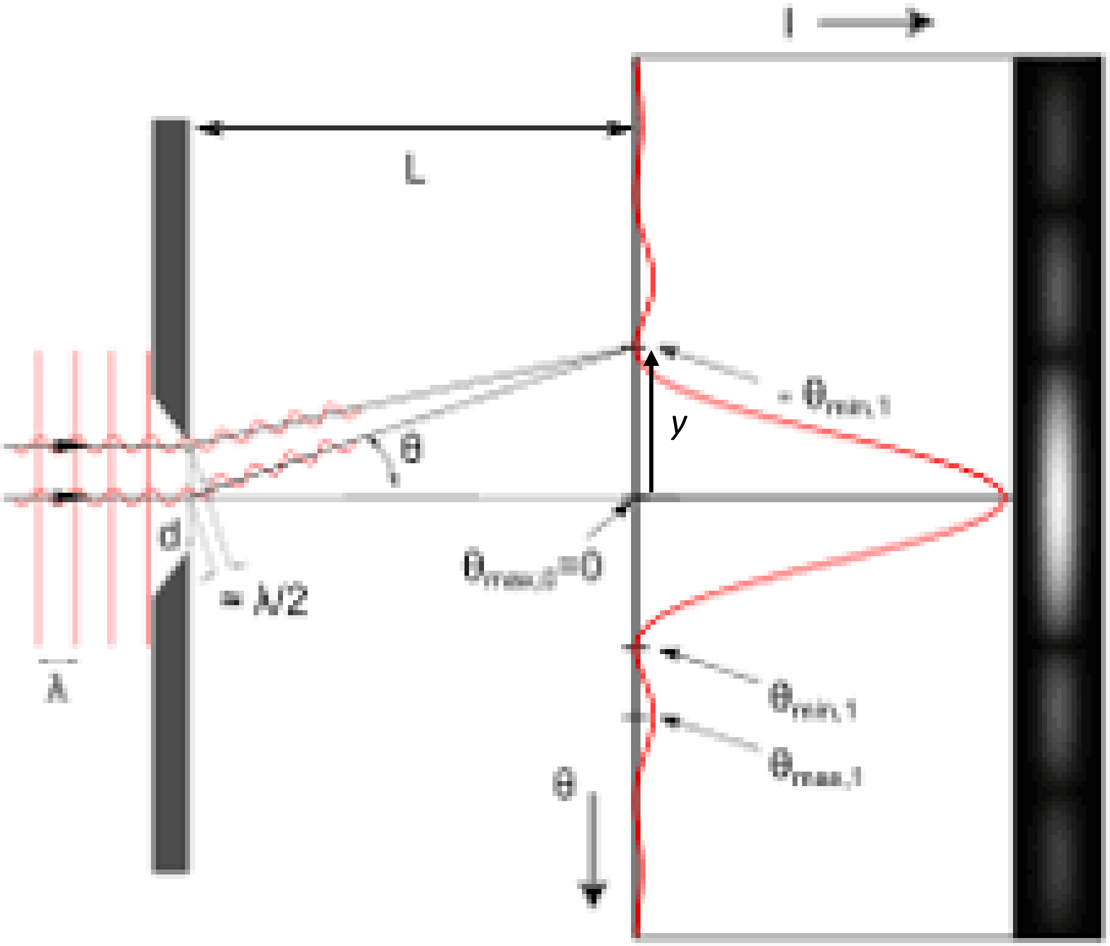
$$\alpha = \frac{\phi}{2}$$

$$\phi = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) sen\theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) sen\theta$$

Difração numa fenda

$$I = I_m \left(\frac{sen\alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) sen\theta$$



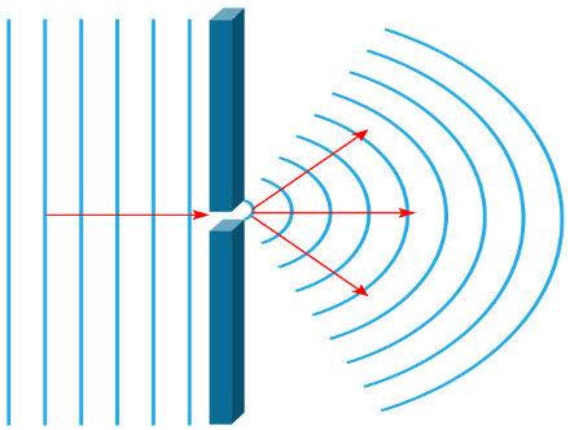
Considerando ângulo pequenos:

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) \frac{y}{L}$$

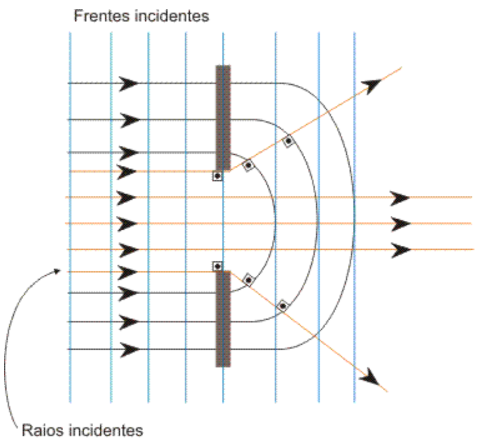
$$I = I_m \left(\frac{sen\left(\frac{\pi a y}{\lambda L} \right)}{\left(\frac{\pi a y}{\lambda L} \right)} \right)^2$$

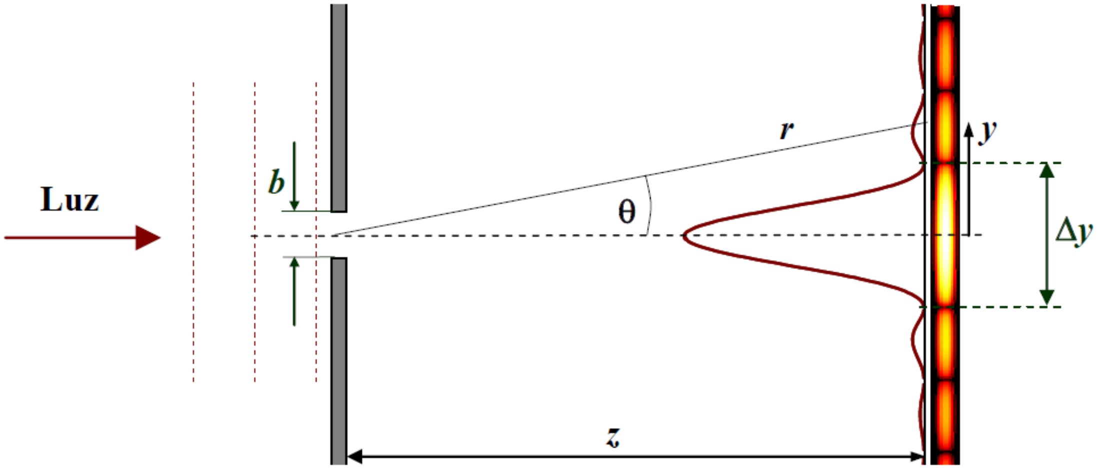
Difração

Fenda pequena



Fenda grande





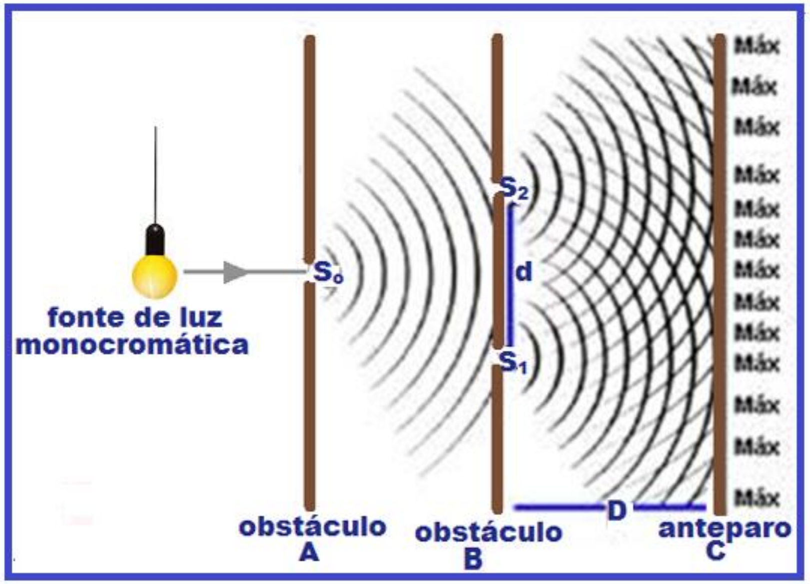
1º Mínimo

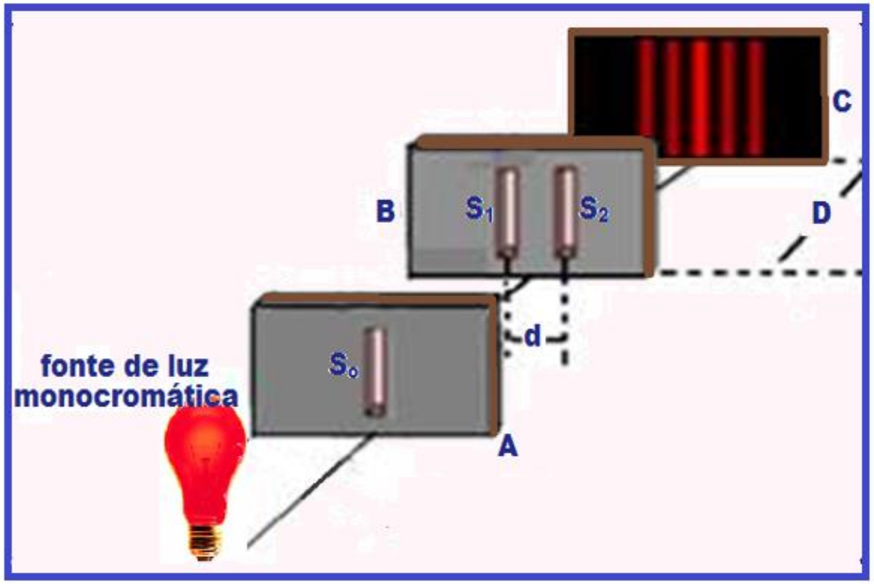
$$a\ sen\theta = \lambda$$

$$sen\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Difração na Dupla Fenda

Experimento de Young: Interferência + Difração





Interferência construtiva $d sen\theta = m\lambda$

Interferência destrutiva $d sen\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

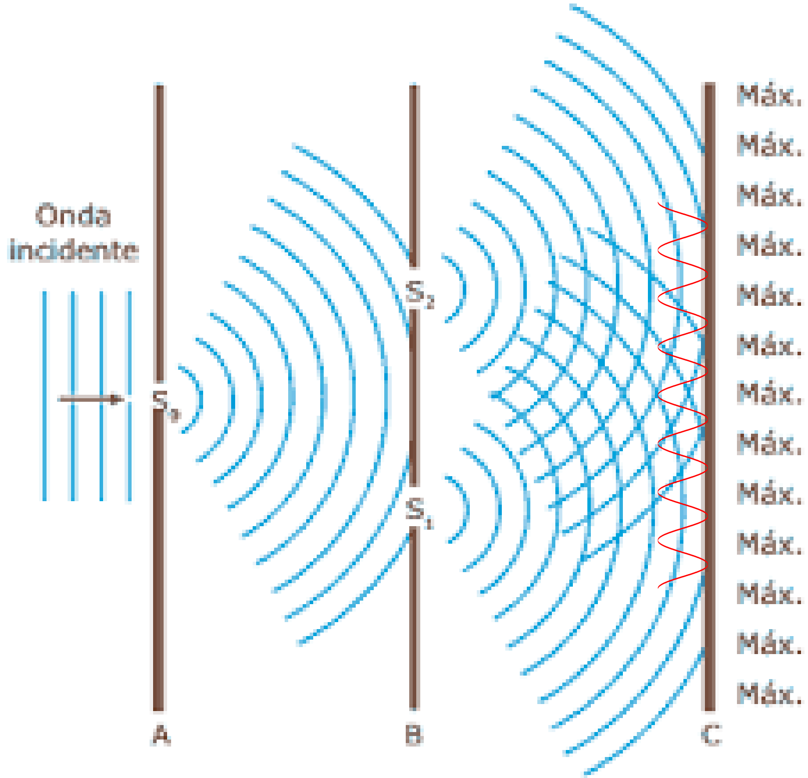
Só termo de interferência

$$I = E^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\phi = \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) sen\theta$$

Difração na Dupla Fenda

Experimento de Young: Interferência



Interferência

$$I = E^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

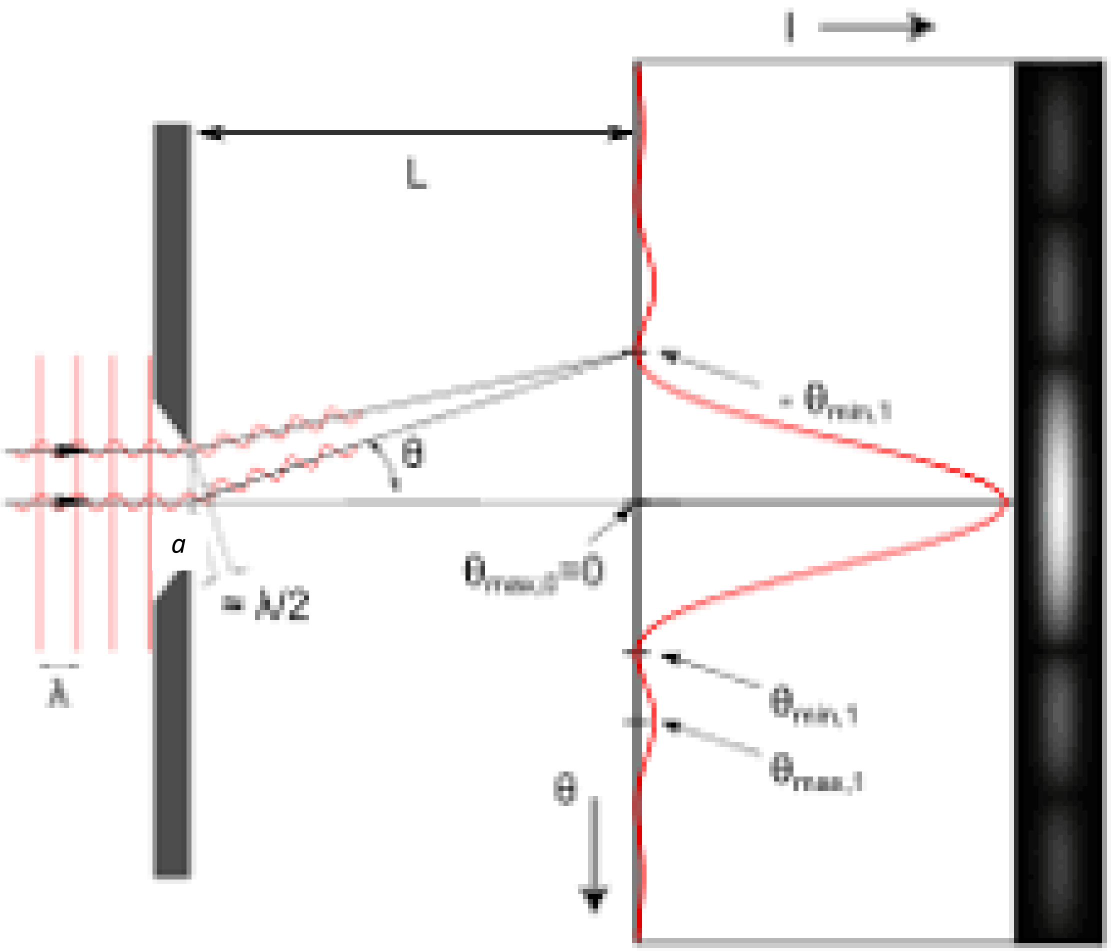
$$\beta = \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right) sen\theta$$

d=Separação entre as fendas

Mas também temos que considerar que as fendas difratam a luz!

Difração na Dupla Fenda

Experimento de Young: Difração



Difração

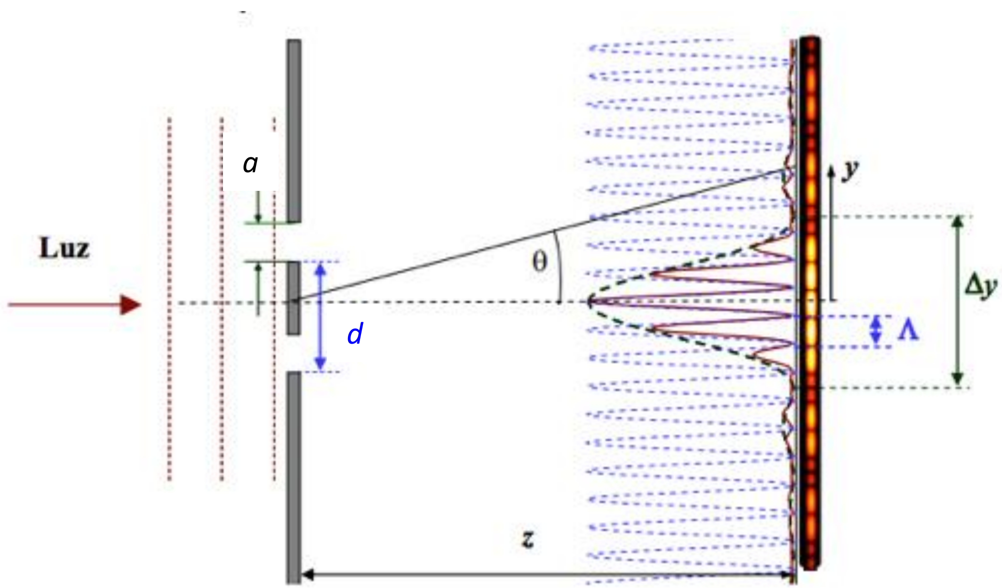
$$I = I_m \left(\frac{sen\alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) sen\theta$$

a=Largura das fendas

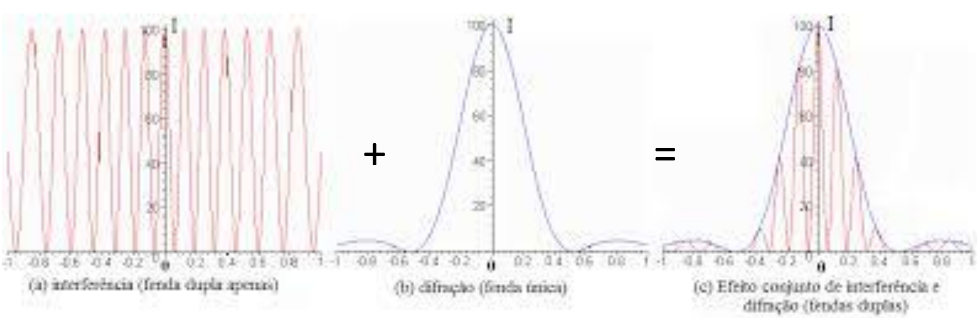
Difração na Dupla Fenda

Experimento de Young: Interferência + Difração



Interferência Difração

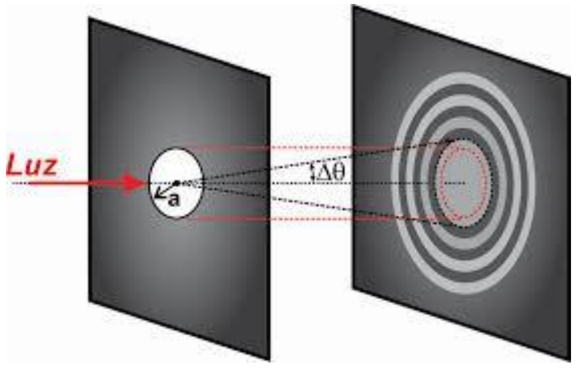
$$I = I_0 \left(\cos^2 \beta\right)\left(\frac{sen\alpha}{\alpha}\right)^2$$



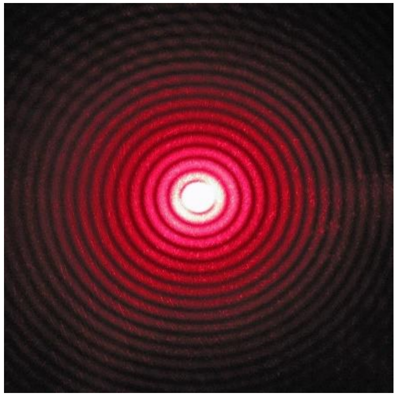
$$\beta = \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right) sen\theta$$

$$\alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) sen\theta$$

Difração num furo

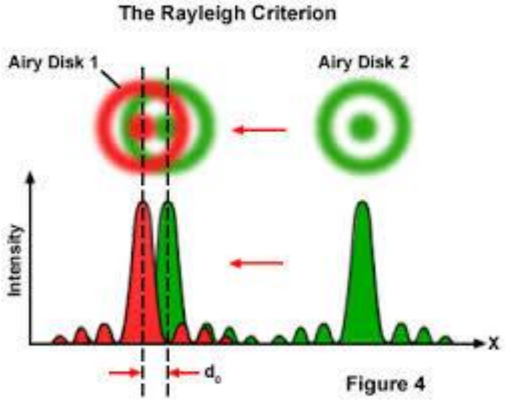


Furos pequenos

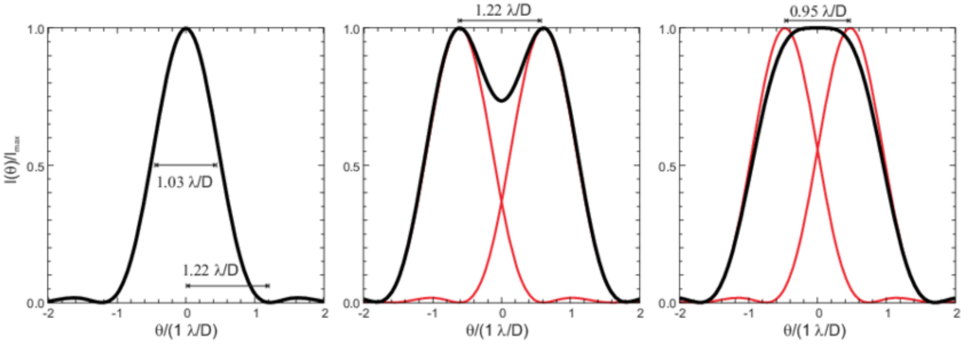


Definição de critério de resolução

(Critério de Rayleigh)



Primeiro mínimo no máximo do vizinho próximo!



1º Mínimo

$$sen\theta = \frac{\lambda}{a}$$

(Fenda)

1º Mínimo

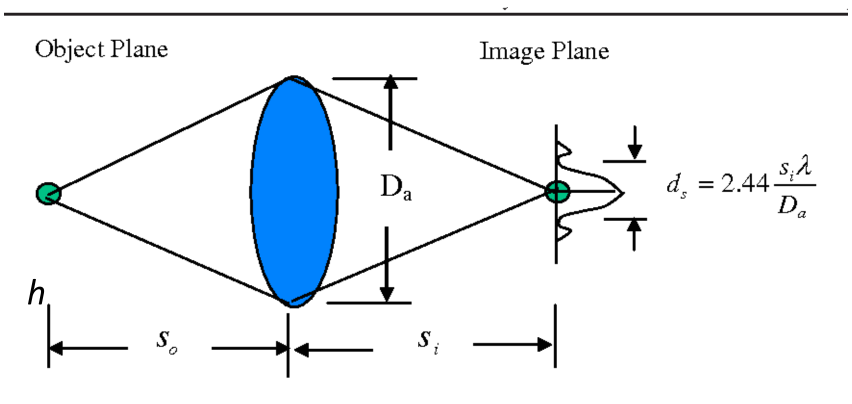
$$sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{a}$$

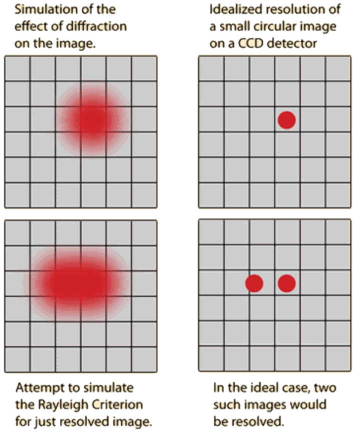
(Círculo)

Critério de Rayleigh

Mas qual a importância desse critério de resolução?

Correlação:
Tamanho Objeto ⇔ Tamanho Imagem ⇔ Tamanho Abertura





Há um limite teórico para a formação da menor ponto imagem (d_s) determinado pelo tamanho do ponto objeto (h), comprimento de onda (λ) e abertura do sistema óptico (D_a).

Condições Geométricas

$$\frac{1}{s_0}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$

$$m=\frac{-s_i}{s_0}=\frac{h_i}{h}$$

+

Condições Óptica Física

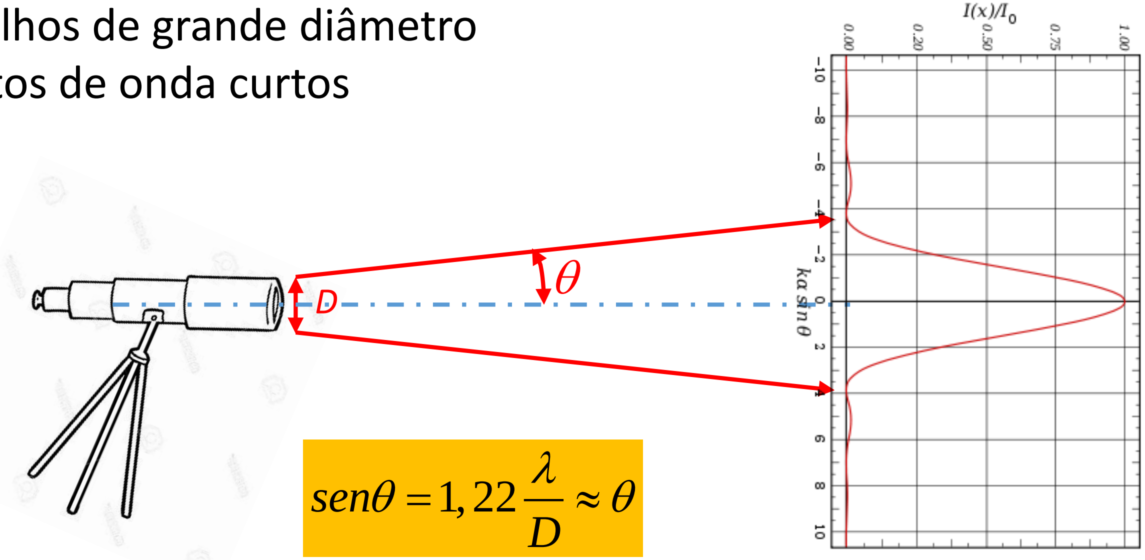
$$sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{h} \Leftrightarrow sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{D_a}$$

$$sen\theta \approx \frac{D_a}{2s_0} \Leftrightarrow sen\theta \approx \frac{D_a}{2s_i}$$

Critério de Rayleigh

Portanto, para melhorar a resolução:

- Lentes, espelhos de grande diâmetro
- Comprimentos de onda curtos

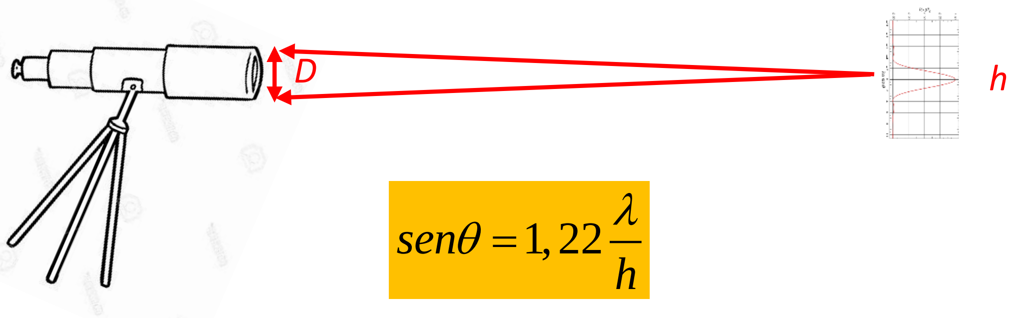


$$sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{D} \approx \theta$$

Considerando λ em 500 nm:

$$\theta \sim 1,22\frac{500x10^{-9}}{5x10^{-3}} \approx 1,22x10^{-4}\,rad$$

- Olho humano, *D*=5 mm:
  θ=1,2x10^{-4} rad
- Telescópio de Galileo, *D*=3 cm:
  θ=2x10^{-5} rad
- Telescópio Gemini, *D*=8 m:
  θ=7,6x10^{-8} rad

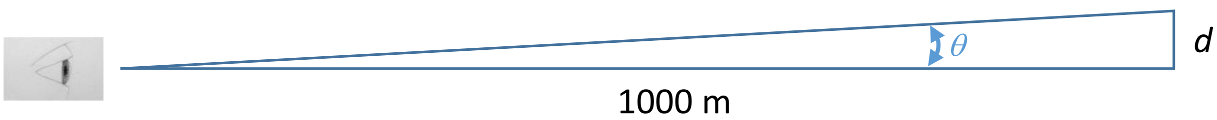


$$sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{h}$$

Critério de Rayleigh

Exemplo: Uma pessoa num avião voando a 1000 m de altitude. Qual é a dimensão o menor objeto que ela pode "ver" (resolver, distinguir)? (considere λ=500 nm)

Olho humano, D=5 mm: Limite de difração θ=1,2x10^{-4} rad



$$sen\theta = \frac{d}{1000} \approx \theta \Rightarrow d = 1000 * 1,2 \times 10^{-4} = 0,12 \text{ m} \Rightarrow$$

12 cm

Telescópio (binóculos), D=3 cm: Limite de difração θ=2x10^{-5} rad

$$d = 1000 * 2 \times 10^{-5} = 0,02 \text{ m} \Rightarrow$$

2 cm

Critério de Rayleigh

Qual deve ser a separação entre dois corpos na Lua para que sejam resolvidas a olho nu? Considere que nossa pupila tem 5 mm de diâmetro, λ=600 nm e distância Terra-Lua=380000 km.

Qual a distância entre dois corpos que pode ser resolvida com um telescópio com espelho de 5 m de diâmetro? É possível ver a bandeira americana fincada na Lua?

Olho humano, *D*=5 mm: Limite de difração θ=1,2x10^{-4} rad

$$sen\theta = \frac{d}{380000x10^3} \approx \theta \quad \Rightarrow \quad d = 380000000 * 1,2 \times 10^{-4} = 45600 \text{ m}$$

Telescópio, *D*=5 m: Limite de difração θ=1,5x10^{-7} rad

$$\theta \sim 1,22 \frac{600x10^{-9}}{5} \approx 1,46x10^{-7} rad$$

$$d = 380000000 * 1,5 \times 10^{-7} = 57 \text{ m}$$