BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial. Um subconjunto $B = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é uma base de V se

(1) $[B] = V$;

(2) B é LI.

Convenção: Se $V = \{0\}$ $B = \emptyset$ é base de V.

TEOREMA: Se $G = \{v_1, ..., v_n\}$ é tal que $[G] = V$ então todo subconjunto de V com mais do que n vetores é LD.

COROLÁRIO: Se $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, ..., w_m\}$ são bases de V, então $m = n$.

Dem:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}[B_1] = V \\ B_2 \text{ é LI}\end{array}\right\} \Rightarrow m \leq n \\ \left.\begin{array}{l}[B_2] = V \\ B_1 \text{ é LI}\end{array}\right\} \Rightarrow n \leq m \end{array}\right\} \Rightarrow m = n.$$

DEF: $\dim V$ = nº de vetores de uma base qualquer de V. dimensão de V

Já temos que (1) $\dim \mathbb{R}^n = n$, já que $can = \{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de V

(2) $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$ já que $can = \{1, t, t^2, ..., t^n\}$ é uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

(3) $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$ já que $can = \{E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ é uma base de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

TEOREMA: Se $G = \{v_1, ---, v_m\}$ é um conjunto gerador de V, então existe B base de V, $B \subset G$.

Demonstração:

Vamos utilizar os seguintes resultados:

(1) Se $V = [A]$, onde $A = \{u_1, ---, u_m\}$ e $u_j \in [u_1, ---, u_{j-1}, u_{j+1}, ---, u_m]$ então $V = [A - \{u_j\}]$.

(2) Se $[G] = V$ e $B \subset V$ é um subconjunto LI de V com o número máximo de vetores, em $[B] = V$.

O conjunto G é finito, então começamos analisando os vetores de G.

Se $v_1 = 0$, podemos jogar fora v_1 -

Se $v_1 \neq 0$, OK

Testamos v_1 e v_2. Se $\{v_1, v_2\}$ é LD, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $v_2 = a v_1$. Então, $[G - \{v_2\}] = [G]$, não precisamos mais do v_2.

Se $\{v_1, v_2\}$ é LI, OK.

Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD, como $\{v_1, v_2\}$ é LI, $v_3 \in [v_1, v_2]$

Nesse caso $[G - \{v_3\}] = [G]$ ...

Como o número de elementos de G é finito, podemos proceder desse modo até encontrar um subconjunto $\{u_1, ---, u_n\} \subset \{v_1, v_2, ---, v_m\}$

tal que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é LI e

$\{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v\}$, $v \in \{v_1, \dots, v_m\}$

é LD.

Logo $v \in [u_1, \dots, u_n]$.

Com $[G] = V$, temos que

$[u_1, \dots, u_n] = V$ pois:

Seja $v \in V$. Então existem

escalares $a_1, \dots, a_m$ tais que

$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$.

Como os u_i's estão entre os v_i's,

temos que $v = a_1 v_1 + \dots + a_m u_m + a_{m} v_{j_1} + \dots + a_m v_{j_m}$

Mas $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots v_{j_m} \in [u_1, \dots, u_n]$.

Logo $v \in [u_1, \dots, u_n]$ e

$\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V.

Note que se $[G] = V$, existe uma base de V contida em G. Basta tomar um subconjunto LI máximo de G.

Temos que:

$$\boxed{\text{Se sabemos que } \dim V = n \text{ e } G \text{ é um conjunto gerador de } V \text{ com exatamente } n \text{ vetores, então } G \text{ é uma base de } V.}$$

Sei: $\dim V = n$

$\{u_1, \dots, u_n\}$ gera V.

Se não fosse LI, existiria uma base de V com menos do que n vetores, o que é um absurdo.

Exemplo

Ache uma base de $\mathbb{R}^3$ (se existir) contida no conjunto

$$\{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,2,1)}_{v_2}, \underbrace{(2,1,2)}_{v_3}, \underbrace{(3,-1,5)}_{v_4}\}$$

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos escalonar a matriz. A colunas da matriz que derem origem a colunas com pivôs na matriz escalonada são LI.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\{v_1, v_2, v_4\}$ é LI e tem 3 vetores, logo é uma base de $\mathbb{R}^3$

Note que

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Essa é matriz do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

, isto é $x_1 v_1 + x_2 v_2 = v_3$

e esse sistema (escalonando a matriz)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo $x_2 = -1$

$x_1 + x_2 = 2$

$x_1 - 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 3$

Assim $v_3 = 3\underbrace{(1,1,1)}_{v_1} + (-1)\underbrace{(1,2,1)}_{v_2}$

$= (2,1,2)$

TEO 2. TEOREMA DO COMPLETAMENTO

Seja $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto L.I de um espaço vetorial de dimensão n.
Então existem vetores $v_{k+1}, \dots, v_n$ tais que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V.

Dem: Se sabemos que $\dim V = n$, sabemos que existe uma base de V $\{u_1, \dots, u_n\} = B$

$[S \cup B] = V$. Como $\{v_1, \dots, v_k\}$ é L.I

$\{v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n\}$, vamos proceder como anteriormente, na demonstração do Teorema 1.

Se $\{v_1, \dots, v_k, u_1\}$ é LD, $u_1 \in [v_1, \dots, v_k]$, logo não precisamos do u_1. Se $\{v_1, \dots, v_k, u_1\}$ é LI, testamos agora $\{v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2\}$ ...

E assim por diante!.

Na prática

Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo os vetores $\underbrace{(1,1,1,1)}_{v_1}$ e $\underbrace{(1,2,1,2)}_{v_2}$

$$
\begin{array}{cccccc}
v_1 & v_2 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ vetores da base canônica de $\mathbb{R}^4$.

Escalonando:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} L2-L1 \\ L3-L1 \\ \longrightarrow \\ L4-L1 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\xrightarrow{L4-L2}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
v_1 & v_2 & e_1 & e_2
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Os vetores $\{v_1, v_2, e_1, e_2\}$ são LI e $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

$\Longrightarrow \{v_1, v_2, e_1, e_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém $\{v_1, v_2\}$.

Note que se $\dim V = n$ então:

Todo conjunto LI com n vetores é uma base de V.

Vale que: (1) $\boxed{\text{Se } \dim V = n}$, então todo subconjunto de V com mais do que n vetores é LD.

(2) Nenhum subconjunto de V com menos do que n vetores gera V.

SUBESPAÇOS:

TEO 3: Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $W \subset V$ um subespaço de V. Então:

(1) $\dim W \leq \dim V$.

(2) Se $\dim W = \dim V$ então $W = V$.

Demonstração: Suponha $W \neq \{0\}$

Seja $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$ uma base de W.

Então $\dim W = k$.

Como $\{w_1, \dots, w_k\}$ é LI e $\{w_1, \dots, w_k\} \subset W \subset V$, $\{w_1, \dots, w_k\}$ é um subconjunto LI de V.

(1) Logo $k \leq n$.

(2) Se $k = n$, então B_W é um subconjunto LI com n vetores. Logo, B_W é uma base de V.