

Lista 3: Variáveis aleatórias contínuas

Thomas Peron

Data de publicação: 30/10/2023. Data da prova: 14/11/2023.

1. A quantidade diária de café, em litros, dispensada por uma máquina localizada em um saguão de aeroporto é uma variável aleatória X que segue uma distribuição uniforme contínua no intervalo $[7, 10]$. Encontre a probabilidade de que, em um determinado dia, a quantidade de café dispensada por esta máquina seja
- (a) no máximo 8.8 litros;
 - (b) mais do 7.4, mas menos do que 9.5 litros;
 - (c) pelo menos 8.5 litros.

2. Seja X uma variável aleatória Uniforme(0,1), e seja $Y = e^{-X}$.

- (a) Encontre a Função de Distribuição Acumulada (CDF) de Y .
- (b) Encontre a Função de Densidade de Probabilidade (PDF) de Y .
- (c) Encontre o Valor Esperado de Y .

3. Seja X uma variável aleatória contínua com Função de Densidade de Probabilidade (PDF)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{32}x^4 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e seja $Y = X^2$.

- (a) Encontre a Função de Distribuição Acumulada (CDF) de Y .
- (b) Encontre a Função de Densidade de Probabilidade (PDF) de Y .
- (c) Encontre o Valor Esperado de Y .

4. O tempo necessário, em minutos, para que um avião obtenha autorização para a decolagem em um determinado aeroporto é uma variável aleatória $Y = 3X - 2$, onde X possui a função de densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre o valor esperado e a variância da variável aleatória Y .

5. Seja X variável aleatória contínua cuja pdf é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Encontre $P(X \leq \frac{2}{3} | X > \frac{1}{3})$.

6. Cada pneu traseiro em um avião experimental deve ser preenchido com uma pressão de 40 libras por polegada quadrada (psi). Seja X a pressão real do ar para o pneu direito e Y a pressão real do ar para o pneu esquerdo. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com a função de densidade conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & 30 \leq x \leq 50, 30 \leq y \leq 50, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Encontre k .

(b) Encontre $P(30 \leq 40 \text{ e } 40 \leq Y < 50)$.

(c) Encontre a probabilidade de que ambos os pneus estejam com pressão insuficiente.

7. Seja X variável aleatória contínua cuja pdf é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2(2x + \frac{3}{2}), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Se $Y = \frac{2}{X} + 3$, calcule a $\text{Var}[Y]$.

8. A pdf conjunta da variável aleatória (X, Y) é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{para } 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Calcule:

- a) $P(X > 1|Y = 1)$, b) $P(X < a)$,
- c) $P(X < 2|Y = y)$, d) $P(Y > 1|X = x)$.
- e) $P(X < 2|0 < Y < 3)$, f) $E(X)$ e $E(Y)$.

9. A pdf conjunta de (X, Y) é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) & \text{se } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- a) Verifique se a função acima é uma função densidade de probabilidade conjunta.
- b) Determine as marginais de X e Y .
- c) Encontre $P(X > Y)$.
- d) Calcule $P(Y > \frac{1}{2}|X < \frac{1}{2})$
- d) X e Y são independentes?

10. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias conjuntamente contínuas com Função de Densidade de Probabilidade Conjunta (PDF) definida como

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}y & -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Encontre as Funções de Densidade de Probabilidade marginais, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.
- (b) Encontre $P(X > 0, Y < 1)$.
- (c) Encontre $P(X > 0 \text{ ou } Y < 1)$.
- (d) Encontre $P(X > 0|Y < 1)$.
- (e) Encontre $P(X + Y > 0)$.

11. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias conjuntamente contínuas com Função de Densidade de Probabilidade Conjunta (PDF) definida como

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}y & -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Encontre a Função de Densidade de Probabilidade Condicional de X dado $Y = y$, para $0 \leq y \leq 1$.
- (b) Encontre $P(X > 0|Y = y)$, para $0 \leq y \leq 1$. Esse valor depende de y ?
- (c) X e Y são independentes?

12. A probabilidade conjunta de X e Y é dada abaixo. Determine $\mathbb{E}[e^{X/2}|Y = 1]$.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}ye^{-xy} & 0 < x < \infty, 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Respostas:

1. (a) 0.60.
(b) 0.70.
(c) 0.50.

2. CDF de Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0, \quad \text{para } y < e^{-1}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1, \quad \text{para } y \geq 1.$$

- (a)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{para } y < \frac{1}{e} \\ 1 + \ln(y) & \text{para } \frac{1}{e} \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{para } y > 1 \end{cases}$$

- (b)

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{para } e^{-1} \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (c) $1 - e^{-1}$

3. (a)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ \frac{1}{32}y^2\sqrt{y} & \text{for } 0 \leq y \leq 4 \\ 1 & \text{for } y > 4. \end{cases}$$

- (b)

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{64}y\sqrt{y} & \text{for } 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (c) 20/7.

4. $\mu_Y = 10$ e $\sigma_Y^2 = 144$.

5. 1/3.

6. (a) $k = \frac{3}{392}10^{-4}$.

- (b) 49/196.

- (c) 37/196.

7. 71/36.

8. (a) e

- (b) e^{-a}

- (c) $1 - e^{-2}$

9. (b) $f_X(x) = \frac{6}{7}(2x^2 + x)$

- (c) 15/56

10. (a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (b) 1/6.
- (c) 2/3.
- (d) 1/3.
- (e) 131/144.

11. (a)

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3x^2+y}{2y+2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(b) Depende.

12. 2.