Máximos e mínimos para funções de duas variáveis

Parte 1

Seja $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, uma função definida num domínio D, e $(x_0, y_0) \in D$.

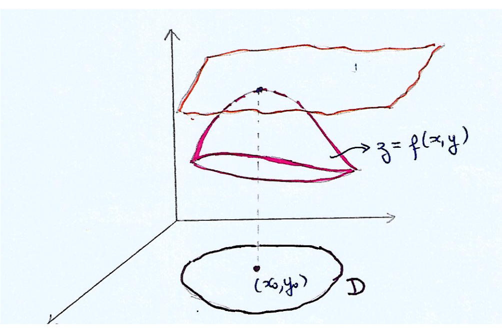
(i) Dizemos que (x_0, y_0) é ponto de máximo (global) de f se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall\ (x, y) \in D$.

(ii) Dizemos que $(x_0, y_0) \in D$ é ponto de máximo local de f se existe uma vizinhança $V = B((x_0, y_0); r)$ de (x_0, y_0) tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall\ (x, y) \in V \cap D$.

(iii) Dizemos que (x_0, y_0) é ponto de mínimo (global) de f se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, $\forall\ (x, y) \in D$.

(iv) Dizemos que $(x_0, y_0) \in D$ é ponto de mínimo local de f se existe uma vizinhança $V = B((x_0, y_0); r)$ de (x_0, y_0) tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, $\forall\ (x, y) \in V \cap D$.

Teorema: Seja $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, uma função diferenciável definida num domínio D e (x_0, y_0) um ponto interior de D. Se (x_0, y_0) é ponto extremante global ou local de f então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.



Definição: Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, dizemos que (x_0, y_0) é ponto crítico de f.

Dessa forma, se $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, é uma função diferenciável, todo ponto interior de D que é ponto extremante (local ou global) é um ponto crítico de f. A recíproca não é verdadeira.

Exemplo: considere a função $f(x, y) = xy$, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. O ponto $(0, 0)$ é ponto crítico de f, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é ponto extremante de f.

Veja porquê: seja $\epsilon > 0$, e considere $V = B((0, 0); \epsilon)$.

Os pontos $(\dfrac{\sqrt{\epsilon}}{2}, \dfrac{\sqrt{\epsilon}}{2})$ e $(-\dfrac{\sqrt{\epsilon}}{2}, \dfrac{\sqrt{\epsilon}}{2})$ pertencem a V (verifique!). Mas temos que

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}) = \frac{\epsilon}{4} > 0 \\ f(-\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}) = -\frac{\epsilon}{4} < 0 \end{cases}$$

e portanto, $(0,0)$ não é ponto de máximo local nem de mínimo local de f. Dizemos, neste caso, que $(0,0)$ é um ponto de sela.

O seguinte teorema apresenta alguma classificação para os pontos críticos interiores ao domínio de uma função.

Vamos, antes, a uma definição:

Definição: Seja $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, uma função de classe C^2 definida num domínio D, e $(x_0, y_0) \in D$. O hessiano da função f no ponto (x_0, y_0) é definido como sendo o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

que indicaremos por $H(x_0, y_0)$. Então

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Teorema: Seja $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ uma função de classe C^2 definida num domínio D e (x_0, y_0) um ponto crítico no interior de D. Então:

(i) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ então (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f.

(ii) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é ponto de máximo local de f.

(iii) Se $H(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é ponto de sela.

(iv) Se $H(x_0, y_0) = 0$, o critério nada decide.

Proposição: Se $z = f(x,y)$ é uma função polinomial de grau 2 então todo ponto extremante local é um ponto extremante global.
(Uma função polinomial de grau 2, de duas variáveis é da forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + k$, com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.)