# Controle Adaptativo - Exercício 4 - 2022

Marco H. Terra

Novembro 2022

**Exercício 1**
Considere a seguinte planta de segunda ordem:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x + bz - u, \\
\mu\dot{z} &= -z + 2u, \\
y &= x,
\end{aligned} \tag{1}
$$

sendo $0 \leq \mu << 1$ e $b$ desconhecido e satisfaz $2b > 1$. A saída da planta deve ser ajustada para acompanhar a saída $x_m$ do modelo de referência

$$\dot{x}_m = -x_m + r. \tag{2}$$

a) Obtenha o modelo da planta de ordem reduzida.

b) Mostre, com simulações, que a lei de controle adaptativa

$$u = lr, \quad \dot{l} = -\gamma er, \quad e = x - x_m \tag{3}$$

satisfaz o objetivo de controle para o modelo de ordem reduzida.

c) Mostre que para $\gamma r^2 > \frac{1+\mu}{\mu(2b+\mu)}$ a lei de controle em b) resultará em instabilidade se aplicada à planta com a ordem plena.

**Solução:**
**a)**
Para $\mu \to 0$, temos que $z = 2u$,

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x + 2bu - u, \\
\dot{x} &= -x + (2b - 1)u,
\end{aligned}
$$

somando e subtraindo a igualdade:

$$(2b-1)u = -(\underbrace{a_m}_{1} + \underbrace{a}_{-1})x + r = (2b-1)l^*r, \tag{4}$$

$$\dot{x} = -x + (2b-1)u - (a_m + a)x + r - (2b-1)l^*r,$$
$$\dot{x} = -x + r + (2b-1)(l^*r + u).$$

Cálculo do erro:

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}}_m = -x + r + (2b-1)(-l^*r + u) + x_m - r. \tag{5}$$
$$\dot{e} = -\underbrace{(x - x_m)}_{e} + (2b-1)(-l^*r + u).$$
$$\dot{e} = -\underbrace{(x - x_m)}_{e} + (2b-1)(-l^*r + lr).$$
$$\dot{e} = -\underbrace{(x - x_m)}_{e} + (2b-1)(\tilde{l}r).$$

Para o erro estimado:

$$\dot{\hat{e}} = -\hat{e} + (2\hat{b}-1)(-lr + \underbrace{u}_{lr}) = -\hat{e}. \tag{6}$$

Equação de Lyapunov:

$$V = \frac{e^2}{2} + \frac{\tilde{l}^2(2b-1)}{2\gamma} \tag{7}$$

Derivada da Equação de Lyapunov:

$$\dot{V} = 2\dot{e}\frac{e}{2} + 2\dot{\tilde{l}}\frac{\tilde{l}(2b-1)}{2\gamma} \tag{8}$$
$$\dot{V} = (-e + (2b-1)\tilde{l}r)e + \dot{\tilde{l}}\frac{\tilde{l}(2b-1)}{\gamma}$$
$$\dot{V} = -e^2 + (2b-1)\tilde{l}re + \dot{\tilde{l}}\frac{\tilde{l}(2b-1)}{\gamma.}$$

Síntese do controlador:

$$
\begin{aligned}
(2b-1)(\tilde{l}r)e &= -\dot{\tilde{l}}\frac{\tilde{l}(2b-1)}{\gamma,} \\
\dot{\tilde{l}} &= \dot{l} = -\gamma r e.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

**c)** Considerando as equações que definem o sistema realimentado com controle adaptativo por modelo de referência:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x + bz - u, \\
\mu\dot{z} &= -z + 2u, \\
\dot{\tilde{l}} &= \dot{l} = -\gamma r e, \\
\dot{x}_m &= -x_m + r.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Sabemos que o erro é definido como $e = x - x_m$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x + bz - u, \\
\dot{z} &= -\frac{z}{\mu} + 2\frac{u}{\mu}, \\
\dot{l} &= -\gamma r(x - x_m), \\
\dot{x}_m &= -x_m + r.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Essas equações podem ser reescritas de maneira matricial, da seguinte forma:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{l} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & b & -r & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu} & 2\frac{r}{\mu} & 0 \\ -\gamma r & 0 & 0 & \gamma r \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ l \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}. \tag{12}
$$

Para definir as condições de estabilidade desse sistema realimentado, devemos analisar os autovalores da matrix de parâmetros de estado do sistema:

$$
det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -b & r & 0 \\ 0 & \lambda + \frac{1}{\mu} & -2\frac{r}{\mu} & 0 \\ \gamma r & 0 & \lambda & -\gamma r \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0, \tag{13}
$$

$$
(\lambda + 1)\left[(\lambda + 1)(\lambda + \frac{1}{\mu})\lambda + \frac{2\gamma b r^2}{\mu} - (\lambda + \frac{1}{\mu})\gamma r^2\right] = 0, \tag{14}
$$

$$(\lambda+1)\left[\lambda^3+(1+\frac{1}{\mu})\lambda^2+(\frac{1}{\mu}-\gamma r^2)\lambda+\frac{2\gamma b r^2}{\mu}-\frac{\gamma r^2}{\mu}\right]=0 \tag{15}$$

Critério de estabilidade de Hurwitz:

$$\begin{vmatrix} 1 & (\frac{1}{\mu}-\gamma r^2) \\ (1+\frac{1}{\mu}) & \frac{2\gamma b r^2}{\mu}-\frac{\gamma r^2}{\mu} \end{vmatrix} \tag{16}$$

$$(1+\frac{1}{\mu})(\frac{1}{\mu}-\gamma r^2)-\left(\frac{2\gamma b r^2}{\mu}-\frac{\gamma r^2}{\mu}\right)>0 \tag{17}$$

$$\frac{1}{\mu}-\gamma r^2+\frac{1}{\mu^2}-\frac{\gamma r^2}{\mu}-\frac{2\gamma b r^2}{\mu}+\frac{\gamma r^2}{\mu}>0 \tag{18}$$

$$\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\right)-\left(\frac{\mu+2b}{\mu}\right)\gamma r^2>0 \tag{19}$$

$$\gamma r^2<\frac{(\mu+1)}{(\mu+2b)\,\mu}. \tag{20}$$