Exercícios da Lista 4

(19) Hipótese: $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ é LI.

Tese: $[v_1, \dots, v_s] \cap [u_1, \dots, u_r] = \{0\}$

Seja $v \in [v_1, \dots, v_s] \cap [u_1, \dots, u_r]$.

Então existem escalares $a_1, \dots, a_s$ tais que $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$ e existem escalares $b_1, \dots, b_r$ com $b_1 u_1 + \dots + b_r u_r = 0$.

Logo $a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = b_1 u_1 + \dots + b_r u_r$ e então $a_1 v_1 + \dots + a_s v_s + (-b_1) u_1 + \dots + (-b_r) u_r = 0$

Como $\{u_1, \dots, u_r; v_1, \dots, v_s\}$ é LI temos que $a_1 = \dots = a_s = -b_1 = \dots = -b_r = 0$.

Logo $v = 0$. ∎

20. Seja $\underbrace{S = \{v_1, \dots, v_m\} \text{ LI}}_{\text{HIPÓTESE}}$. Mostrar que

$\underbrace{\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\} \text{ é LI}}_{\text{TESE}}$.

Suponha que $\underbrace{a_1 v_1 + a_2(v_2 - v_1) + \dots + a_m(v_m - v_1) = 0}_{(*)}$.

Queremos provar que

$a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$.

Partindo de (*) temos:

$$(a_1 - a_2 - \cdots - a_m)v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0$$

Usando a hipótese temos:

(1) $a_1 - a_2 - \cdots - a_m = 0$

(2) $a_2 = \cdots = a_m = 0$

(2) em (1) $\Rightarrow$ a_1 também é igual a 0.

Logo $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Vale a recíproca?

Suponha agora que

$\underbrace{\{v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1\} \text{ é LI}}_{\text{Hipótese}}$. (**)

Vale que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é LI?

Suponha que $b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_m v_m = 0$.

Então: $b_1 v_1 + b_2 v_2 - b_2 v_1 + b_2 v_1 + b_3 v_3 - b_3 v_1 + b_3 v_1$

$+ \cdots + b_m v_m - b_m v_1 + b_m v_1 = 0$.

Temos então:

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_m)v_1 + b_2(v_2 - v_1) + b_3(v_3 - v_1) + \cdots$$
$$+ b_m(v_m - v_1) = 0$$

Como (**) é LI temos:

$$\begin{cases} b_1 + \cdots + b_m = 0 \\ b_2 = \cdots = b_m = 0 \end{cases}$$

Logo $b_1 = 0$.

Assim $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ e temos que a afirmação vale, isto é, a recíproca também é verdadeira. ■

21: "A união de 2 conjuntos LI de um espaço vetorial é um conjunto LI",

(a) F $\{(1,1,1)\}$ é LI
$\{(2,2,2)\}$ é LI mas $\{(1,1,1),(2,2,2)\}$ é LD,

(b) F Falsa também
$\{(1,1,1)\}$ é LI e $\{(1,2,1)\}$ é LI
e $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$ é LI,

(c) F $\{(1,1,1)\} \cap \{(2,2,2)\} = \phi$, mas
$\{(1,1,1),(2,2,2)\}$ é LD.

(d) V Se S e T são conjuntos LI e $S \subset T$, então $S \cup T = T$ que é LI.

(e) F $\{u_1, \ldots, u_r\}$ LI e $\{u_1, \ldots, u_r\} \cap [v_1, \ldots, v_s] =$
$\{v_1, \ldots, v_s\}$ LI

Exemplo: Se $S = \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.
e $T = \{(1,1)\}$, então $S \cap [T] = \phi$ mas
$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$,

(f) F

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$S = \{(1,0,0)\}$

$T = \{(1,1,0), (0,1,0)\}$

$|S| + |T| = 3$ mas $S \cup T$ é LD.

25 IMPORTANTE

($\Rightarrow$) $\{u, v, w\}$ LI $\Rightarrow$ $\{u,v\}$, $\{u,w\}$, $\{v,w\}$ é LI pois todo subconjunto de um conjunto LI é LI.

($\Leftarrow$) NÃO VALE

Em $\mathbb{R}^2$ considere, por exemplo

$S = \{(1,1), (0,1), (1,0)\}$

$\{(1,1), (0,1)\}$ é LI, $\{(1,1),(1,0)\}$ é LI e $\{(0,1),(1,0)\}$ é LI.

Mas $(1,1) = (0,1) + (1,0)$.

Logo S é LD. $\blacksquare$