Aula 9 — Núcleo e Imagem

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo K e $T: U \mapsto V$ uma transformação linear.

(a) O conjunto $\{u \in U : T(u) = 0\}$ é chamado núcleo de T e é denotado por $Nuc\,T$.

(b) $\{v \in V ; \exists u \in U$ tal que $T(u) = v\}$ é chamado imagem de T que denotamos por $Im\,T$.

OBS: T é sobrejetora se só se $Im\,T = V$.

Proposição:

(a) $Nuc\,T$ é subespaço de U e $Im\,T$ é subespaço de V.

(b) T é injetora se só se $Nuc\,T = \{0\}$.

dem. Exercício.

Exemplos:

1) Considere $T: \mathbb{R}^3 \mapsto M_2(\mathbb{R})$

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix}.$$

$$\text{Nuc}\, T = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a+b = c-b = 0\}$$

$$= \{(-b,b,b) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\} = [(-1,1,1)].$$

$$\text{Im}\, T = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

$\dim \text{Nuc}\, T = 1$ e $\dim \text{Im}\, T = 2$.

2) Dado $v \in \mathbb{R}^3 / \{0\}$ defina $T_v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

por $T_v(u) = u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3)$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i v_i .$$

T_v é linear.

$\text{Nuc}\, T_v = \{ u \in \mathbb{R}^3 : u \cdot v = 0 \}$

$= \{ u \in \mathbb{R}^3 : u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0 \}$

Plano passando pela origem ortogonal a v.

$\text{Im}\, T_v = \mathbb{R}$ já que $v \neq 0$.

Logo T_v é sobrejetor.

$\dim \text{Nuc}\, T_v = 2$ e $\dim \text{Im}\, T_v = 1$.

Lema. Seja $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de U.

Então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é conjunto gerador de $\text{Im}\, T$.

dem. Seja $v \in \text{Im}\,T$. Por definição $\exists\, u \in U$ tq. $T(u) = v$. Como $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ temos

$$v = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) \rightsquigarrow v \in [T(u_1), \dots, T(u_n)].$$

$\blacksquare$

Teo. (Núcleo e Imagem) U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com $\dim U$ finita. Seja $T : U \longmapsto V$ uma transformação linear. Então

$$\dim U = \dim \text{Nuc}\,T + \dim \text{Im}\,T.$$

dem. Suponha $\text{Nuc}\,T \neq \{0\}$ e seja $\{u_1, \dots, u_k\}$ uma base para $\text{Nuc}\,T$. Complete tal base para uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k, z_1, \dots, z_e\}$ de U. Pelo Lema anterior e construção de $\mathcal{B}$ temos que $\text{Im}\,T = [T(z_1), \dots, T(z_e)]$.

Afirmação: $\{T(z_1), \dots, T(z_e)\}$ é l.i. Com efeito, se

$$0 = \alpha_1 T(z_1) + \dots + \alpha_e T(z_e) \iff 0 = T\left(\sum_{i=1}^{e} \alpha_i z_i\right)$$

$\Rightarrow \quad w = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i z_i \in \text{Nuc}\, T$

Mas $\{z_1, \dots, z_\ell\} \cup \text{Nuc}\, T = \phi$.

$\therefore \quad w = 0$, i.e., $\alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$.

Logo $\dim U = k + \ell = \dim \text{Nuc}\, T + \dim \text{Im}\, T$.

O caso $\text{Nuc}\, T = \{0\}$ é análogo, basta ver que

$k = 0$. $\blacksquare$

Definição: O posto de uma transformação linear é a dimensão de sua imagem.

Exercícios. Seção 3.2.6: 2, 3, 4, 8, 10, 11

Isomorfismos

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T: U \longmapsto V$ uma transformação linear.

(a) Dizemos que T é um isomorfismo se é bijetora i.e. se é injetora e sobrejetora.

(b) Neste contexto, dizemos que U e V são espaços vetoriais isomorfos se $\exists T: U \longmapsto V$ linear e isomorfismo.

OBS: Se U e V são isomorfos denotamos por $U \simeq V$. Neste caso, temos que $\dim U = \dim V$.

Transformação inversa

Seja $T: U \longmapsto V$ uma transformação linear bijetora. Então, para cada $v \in V$, $\exists! u \in U$ tal que $T(u) = v$. Definimos $T^{-1}: V \longmapsto U$ por $T^{-1}(v) = u$. Veja que

$T(T^{-1}(v)) = v \;\; \forall v \in V$ e $T^{-1}(T(u)) = u \;\; \forall u \in U$.

Além disso temos que T^{-1} também é linear.
De fato, $\forall\, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos $u, z \in U$ tal que $T(u) = v$ e $T(z) = w$. Assim,

$$T^{-1}(\alpha v + w) = T^{-1}(\alpha T(u) + T(z)) = T^{-1}(T(\alpha u + z))$$
$$= \alpha u + w = \alpha T^{-1}(v) + T^{-1}(z).$$

Proposição: Seja $T: U \mapsto V$ linear com $\dim U = \dim V$ finita e não nula. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é isomorfismo.

(b) T é injetora.

(c) T é sobrejetora

dem. (a) $\to$ (b) é claro. Suponha (b) vamos mostrar (c). Pelo teorema do núcleo e imagem

$$\dim U = \dim \overset{0}{\cancel{\text{Nuc}(T)}} + \dim \text{Im}(T) = \dim \text{Im}(T).$$

Como $\dim V = \dim U \rightsquigarrow \dim V = \dim \text{Im}(T)$ e assim $\text{Im}(T) = V \rightsquigarrow T$ é sobrejetora.

Vamos agora provar (c) $\Rightarrow$ (a). Com T é sobre,

$$\dim V = \dim U = \dim Nuc(T) + \dim Im(T)$$
$$= \dim Nuc(T) + \dim V.$$

$\therefore$ $\dim Nuc(T) = 0 \leadsto$ T é injetora.

Logo T é bijetora e um isomorfismo.

$\blacksquare$

OBS: Os exemplos abaixo ilustram que as hipóteses $1 \leq \dim U = \dim V < +\infty$ são essenciais.

Exemplos:

1) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : (x,y) \to x$

é linear, sobrejetora mas não é injetora.

$Nuc(f) = [(0,1)]$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

2) $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2 : x \to (x,0)$ é linear, injetora mas não é sobrejetora. $Nuc(g) = \{0\}$ e $Im(g) = [(1,0)]$.

3) $D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p(x) \to p'(x)$

é sobre mas não é injetor. De fato,

$$Nuc(D) = [1] \quad \text{(subespaço gerado pela função constante)}$$

e para todo $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\exists\, q(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ tal que}$$

$$q'(x) = p(x).$$

Exercício. Seja $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K}^n)$. Mostre que:

(a) $T_A : \mathbb{K}^m \mapsto \mathbb{K}^n : X \longmapsto AX$ é uma transformação linear. (b) Se A possui inversa a esquerda (i.e. $\exists\, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K}^n)$ tal que $BA = I$), então $Nuc(T_A) = \{0\}$.

Sabemos que se U e V são isomorfos então $\dim U = \dim V$. Agora veremos que espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com mesma dimensão também são isomorfos.

Teo. Dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ de mesma dimensão finita são isomorfos.

dem. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ bases de U e V respect^te.

Vimos que $\exists!\ T: U \mapsto V$ transformação linear t.q. $T(u_i) = v_i \ \forall i = 1, \dots, n$. Basta verificar que T é injetor ou sobrejetor já que $\dim U = \dim V = n < +\infty$.

Vamos ver que é sobrejetor. Com efeito,

$$\operatorname{Im} T = \{T(u) : u \in U\} = \left\{T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) : \alpha_i \in \mathbb{K}\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) : \alpha_i \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{K}\right\}$$

$= V$ já que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V.

Logo T é sobrejetora e um isomorfismo.

Exercícios: seção 3.3.7: 1, 2, 3, 4, 5.