Aula 8

Transformações lineares

Sejam U e V espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função $T: U \mapsto V$ é uma transformação linear se

(a) $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in U$

(b) $T(\alpha u) = \alpha T(u) \quad \forall u \in U$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Veja que isto é equivalente a

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$$

$$\forall u, v \in U \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Propriedades: Se $T: U \mapsto V$ é linear, então

(a) $T(0) = 0$. (b) $T(-u) = -T(u) \quad \forall u \in U$

(c) $T\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(u_i)$.

Exemplos de transformações lineares.

1) Transformação nula

$T: U \mapsto V$ dada por $Tu = 0$ $\forall u \in U$.

2) Transformação identidade

$T: U \mapsto U$ dada por $Tu = u$ $\forall u \in U$

3) $T_a: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $T_a(x) = ax$

$a \in \mathbb{R}$. Veja que o gráfico de T_a

é uma reta passando na origem.

4) $T: \mathbb{K}^3 \mapsto M_2(\mathbb{K})$

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix}.$$

5) O operador derivação em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$D: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \longrightarrow a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

6) O operador integração em $\mathcal{C}([a,b])$

para qq. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ limitado.

$$I: \mathcal{C}([a,b]) \longmapsto \mathcal{C}([a,b])$$

$$f \longmapsto \int_a^b f.$$

OBS: Vejam que os operadores D e I acima estão bem definidos. Polinômios são funções infinitamente deriváveis e toda função contínua definida um intervalo limitado e fechado da reta é integrável.

7) $T: \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}$ dado por

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \text{ para algum } (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Veja que $T(e_i) = a_i$ onde e_i é elemento da base canônica de $\mathbb{K}^n$. Assim, como T é linear

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Teo. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com base $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ respectivamente. Então existe uma única transformação linear tal que $T(u_i) = v_i \ \forall i = 1, \dots, n$.

dem. Dado $u \in U$ $\exists!$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Defina $T(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Então $T(u_i) = v_i$, e como $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é única, temos que T está bem definida. Vamos ver que T é linear. $\forall u, w \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos

$$T(\alpha u + w) = T\left(\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i\right)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i + \beta_i) u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i + \beta_i) v_i$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \alpha T(u) + T(w)$$

onde $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ e $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$.

$\therefore$ T é linear. Além disso T é única com $T(u_i) = v_i$. De fato, se $S: U \mapsto V$ é linear e satisfaz $S(u_i) = v_i$, então $(T - S)(u) = 0$ $\forall u \in U$

Já que $(T-S)(u) = (T-S)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(T(u_i) - S(u_i) \right) = 0 .$$ ∎

Exercícios: secção 3.1.6: 1, 2, 4 e 5.