UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

# ZAB1111 – ESTATÍSTICA BÁSICA

## Aula 14

## TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA POPULACIONAL

Material preparado pelo Prof. Dr. César Gonçalves de Lima – FZEA/USP

# 4. TESTES DE HIPÓTESES

**Problema**: Executar testes de hipóteses sobre o valor de parâmetros de interesse de uma população de estudo.

**Óbvio**: Se conhecermos todos os elementos de uma população, o que é pouco provável, também conheceremos o verdadeiro valor de um particular parâmetro de interesse e não precisaremos estimá-lo nem testar hipóteses sobre o seu valor.

**Mais comum**: Na maioria das vezes temos acesso a uma amostra pequena da população e as nossas conclusões deverão ser baseadas em estimativas dos parâmetros obtidos nesta amostra.

**Teste de hipóteses** é uma ferramenta estatística que permite validar ou rejeitar uma hipótese (afirmação) feita sobre algum parâmetro de interesse, com base em resultados obtidos em uma amostra.

**Exemplo 4.1.** Um leilão de bezerros Nelore procedentes de duas grandes fazendas (FAZ-1 e FAZ-2) está sendo realizado. Os animais dessas duas fazendas apresentam as seguintes características:

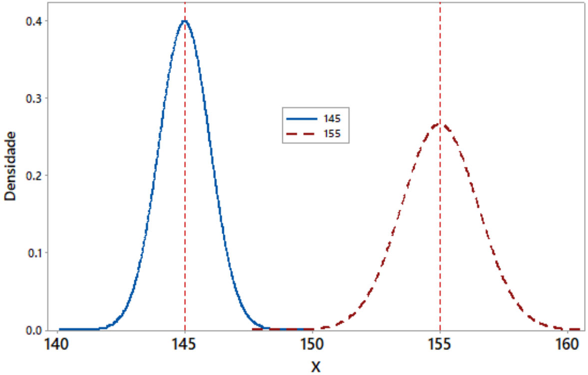
| Fazenda | Peso médio ($\mu$) | Desvio padrão ($\sigma$) | Variância ($\sigma^2$) |
|---|---|---|---|
| FAZ-1 | 145 $kg$ | 12 $kg$ | 144 $kg^2$ |
| FAZ-2 | 155 $kg$ | 20 $kg$ | 400 $kg^2$ |

Um lote de animais de procedência ignorada vai para leilão e um comprador leigo, precisa saber a procedência dos animais para fazer uma oferta, pois pretende comprar somente animais da FAZ-2.

O edital do leiloeiro informa que pouco antes do início do evento será divulgado o peso médio ($\bar{x}$) de uma amostra de 25 animais do lote que vai para leilão.

Com base neste valor, que **regra de decisão** o comprador deve usar para saber se o lote de animais que vai para leilão é da FAZ-2?

Vamos admitir que o peso dos animais tem distribuição normal (o que é comum!)




**Sugestão:** Concluir que os animais são da Faz-2 se o peso médio ($\bar{x}$) estiver mais próximo de 155 kg e que são da Faz-1 se $\bar{x}$ estiver mais próximo de 145 kg.

Para testar as hipóteses:

$H_0$: os animais são da Faz-2

$H_1$: os animais são da Faz-1

podemos definir a seguinte regra de decisão:

Se $\bar{x} < 150$ concluir que os animais são da Faz-1.

Se $\bar{x} \geq 150$ concluir que os animais são da FAZ-2.

Algumas dúvidas sobre esta regra de decisão:

- Será que o comprador pode estar enganado quanto à procedência dos animais?
- É possível que o peso médio de um lote de 25 animais da FAZ-2 seja igual ou inferior a 150 kg?
- É possível que o peso médio de um lote de 25 animais da FAZ-1 seja superior a 150 kg?

Na tomada de decisão sobre a procedência dos animais existem dois tipos de erro que o comprador pode cometer com base em qualquer regra pré-fixada, que serão numerados para facilitar a linguagem:

- **Erro tipo I: concluir que os animais são da FAZ-1 quando na verdade são da FAZ-2**

  Acontece quando uma amostra de animais da FAZ-2 apresenta um peso médio $\bar{x} < 150$ kg.

- **Erro tipo II**: concluir que os animais são da FAZ-2 quando na verdade são da FAZ-1.

  Acontece quando uma amostra de animais da FAZ-1 apresenta um peso médio $\bar{x} \geq 150$ kg.

Para calcular a probabilidade de ocorrência desses dois tipos de erros, <u>após admitir que o peso dos animais tem distribuição normal</u>, precisamos definir a <u>hipótese de nulidade</u> ($H_0$) e a <u>hipótese alternativa</u> ($H_a$):

$H_0$: os animais são da FAZ-2

Ou $H_0$: $X \sim N(\mu_2 = 155kg, \sigma_2^2 = 400kg^2)$

$H_a$: os animais são da FAZ-1

Ou $H_a$: $X \sim N(\mu_1 = 145kg; \sigma_1^2 = 144kg^2)$

De uma forma mais simplificada podemos escrever as duas hipóteses como:

$H_0$: $\mu = 155$ ($\sigma^2 = 400kg^2$)

$H_a$: $\mu = 145$ ($\sigma^2 = 144kg^2$)

**Definição**: Região Crítica ($RC$) de um teste é a região formada pelos valores que nos levam a rejeitar a hipótese $H_0$.

Baseado na regra de decisão adotada no exemplo, podemos escrever a região crítica como: $RC = \{\bar{x} \in \mathrm{R}: \bar{x} < 150\}$. Então:

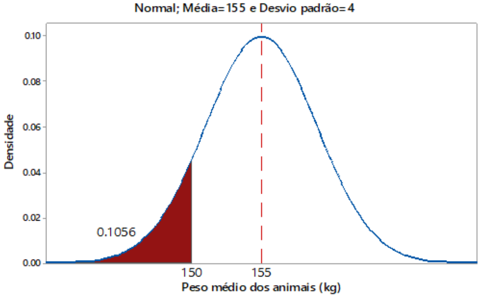
$$P(Erro\ tipo\ I) = P(\bar{x} \in RC \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

$$P(Erro\ tipo\ II) = P(\bar{x} \notin RC \mid H_a \text{ é verdadeira}) = \beta$$

Como vamos usar a média amostral, $\bar{x}$, de $n = 25$ animais, se os animais forem da

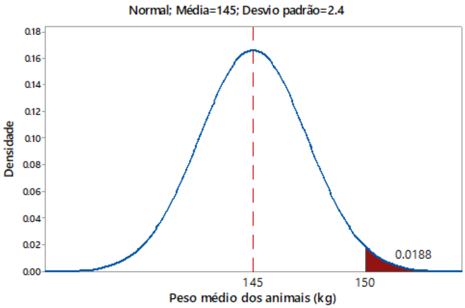
- Faz-1: $\bar{x} \sim N(145; 144/25)$ ou $\bar{x} \sim N(145; 5{,}76)$
- Faz-2: $\bar{x} \sim N(155; 400/25)$ ou $\bar{x} \sim N(155; 16)$

A probabilidade de cometer o erro do tipo I é igual a:




$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{Erro tipo I})\\ &= P[\bar{x} < 150 \mid \bar{x} \sim N(155, 16)]\\ &= P\left\{Z < \frac{(150-155)}{\sqrt{16}}\right\}\\ &= P(Z < -1{,}25) = 0{,}1056\end{aligned}$$

# A probabilidade de se cometer o erro do tipo II é igual a:




$$\beta = P(\text{Erro tipo II})$$
$$= P[\bar{x} \geq 150 \mid \bar{x} \sim N(145; 5{,}76)]$$
$$= P\left\{Z \geq \frac{(150-145)}{\sqrt{5{,}76}}\right\}$$
$$= P(Z \geq 2{,}08) = 0{,}0188$$

As probabilidades de ocorrência dos dois tipos de erros:

| Origem dos animais | Decisão | |
|---|---|---|
| | FAZ-1 | FAZ-2 |
| FAZ-1 | Sem erro | $\beta$ = 1,9% |
| FAZ-2 | $\alpha$ = 10,6% | Sem erro |

O comprador leigo cometerá o Erro tipo I com maior probabilidade (10,6%) do que o Erro tipo II ($\beta$ = 1,9%).

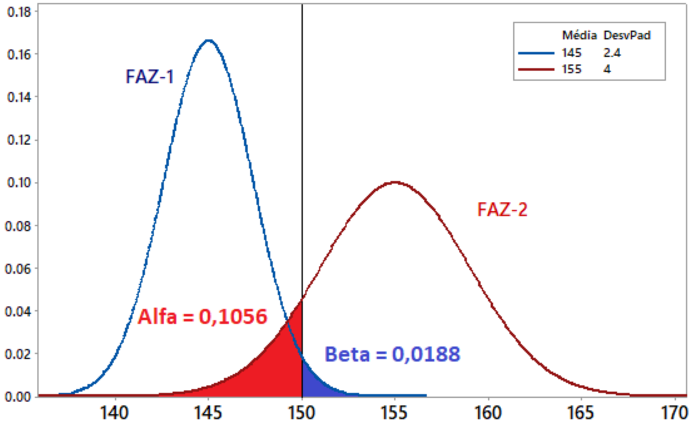



Figura 1. Probabilidades de cometer os erros tipo I e II relacionadas com a regra de decisão adotada

Em relação ao mecanismo dos erros, vale observar que:

$i$) Os tamanhos dos erros tipo I e II dependem exclusivamente da regra de decisão adotada.

$ii$) Adotando outros limites na regra de decisão

Se escolhermos $\bar{x}$ inferior a 150: $\alpha \downarrow$ e $\beta \uparrow$

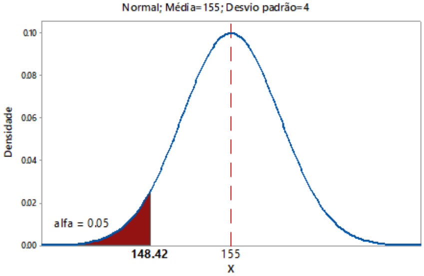
Se escolhermos $\bar{x}$ superior a 150: $\beta \downarrow$ e $\alpha \uparrow$

$iii$) $\alpha \downarrow$ e $\beta \downarrow$ simultaneamente, somente se aumentarmos o tamanho da amostra usada no teste.

**Procedimento usual para realizar um teste de hipótese:**

É mais comum fixarmos um valor para $\alpha = P(Erro\ tipo\ I)$, chamado **nível de significância do teste**, e encontrarmos a região crítica correspondente.

Por exemplo, fixando-se $\alpha$ = 5% (o que é bastante comum!) temos:



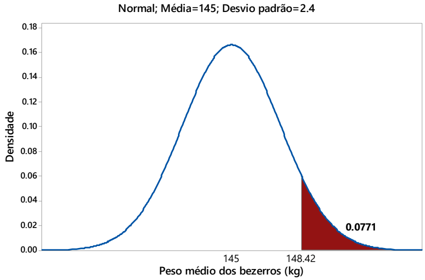

$$\alpha = 0{,}05$$
$$= P[\bar{x} < \bar{x}_c \mid \bar{x} \sim N(155; 16)]$$
$$= P(Z < -1{,}645)$$
$$\Rightarrow -1{,}645 = \frac{\bar{x}_c - 155}{\sqrt{16}} \Rightarrow \bar{x}_c = 148{,}42\text{kg}$$

Neste caso, a região crítica fica $RC(5\%) = \{\bar{x}_c < 148{,}42\}$ e a regra de decisão associada a esta $RC$ pode ser escrita como:

Se $\bar{x} < 148{,}42$ kg conclua que os animais são da FAZ-1

Se $\bar{x} \geq 148{,}42$ kg, conclua que os animais são da FAZ-2

Note que para esta $RC(5\%)$ temos $\alpha = P(Erro\ do\ tipo\ II) = 0{,}05$ e




$$\beta = P(Erro\ do\ tipo\ II)$$
$$= P[\bar{x} \geq 148{,}42;\ \bar{x} \sim \mathrm{N}(145;\ 5{,}76)]$$
$$= P(\mathrm{Z} \geq 1{,}425) = 0{,}0771$$

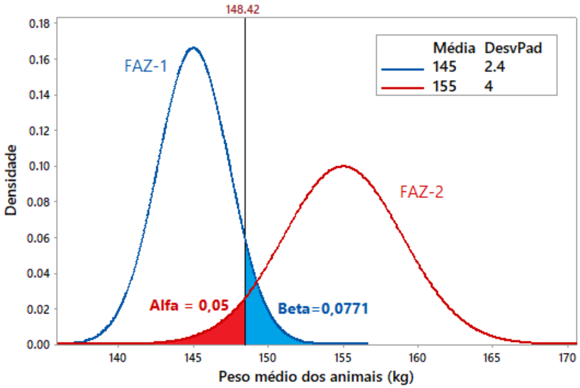



**Figura 9.** Probabilidades de cometer os erros tipo I e II associados à $RC(5\%) = \{\bar{x}_c < 148{,}42\}$

Vamos generalizar a notação para os testes de hipótese sobre qualquer parâmetro.

De um modo geral os erros envolvidos num teste de hipótese podem ser descritos como:

- $Erro\ tipo\ I$: consiste em rejeitar $H_0$ quando ela é verdadeira ou rejeitar erroneamente $H_0$
- $Erro\ tipo\ II$: consiste em aceitar $H_0$ quando ela é falsa ou aceitar erroneamente a hipótese $H_0$.

A hipótese da nulidade ($H_0$) <u>é sempre escrita como uma igualdade</u> e a hipótese alternativa ($H_a$), como uma desigualdade.

A especificação da hipótese alternativa ($H_a$) depende do grau de informação que se tem sobre o problema ou da pergunta feita pelo pesquisador.

Vamos ver alguns exemplos.

**Situação 1.** Suponhamos que os animais possam vir da FAZ-2 e de outras fazendas, cujos animais apresentam um peso médio inferior a 155 kg e que o interesse do comprador é por animais da FAZ-2.

Neste caso, só iremos desconfiar que os animais não são da FAZ-2 se o peso médio dos animais for bem inferior a 155 kg. Neste caso as hipóteses a serem testadas podem ser definidas como:

$$\begin{cases} H_0\text{: os animais são da FAZ} - 2 \\ H_a\text{: os animais não são da FAZ} - 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0\text{: } \mu = 155\ kg \\ H_a\text{: } \mu < 155\ kg \end{cases}$$

Neste caso tanto a regra de decisão (hipótese alternativa) é chamada **unilateral à esquerda** e pode escrita como:

Se $\bar{x} < \bar{x}_c$ concluir que os animais não são da FAZ-2

Se $\bar{x} \geq \bar{x}_c$ concluir que os animais são da FAZ-2

Se no Exemplo 4.1 fixarmos $\alpha$ = 5% teremos:

$$0{,}05 \ = P(\bar{x} < \bar{x}_c \mid \bar{x} \sim \mathrm{N}(155;\, 16) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < z_\alpha)$$

$$\Rightarrow \ z_\alpha = -1{,}65 \Rightarrow -1{,}65 = \frac{\bar{x}_c - 155}{\sqrt{16}} \quad \Rightarrow \bar{x}_c = 148{,}40 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \ RC(5\%) = \{\bar{x} \in \mathrm{R} \colon \bar{x} < 148{,}40\}$$

Então, ao nível de 5% de significância, <u>rejeitaremos</u> $H_0$ e concluiremos que os animais <u>não são da FAZ-2</u> quando $\bar{x}$ < 148,40$kg$ e não rejeitaremos $H_0$ e concluiremos que os animais são da Faz-2, quando $\bar{x} \geq$ 148,40kg.

**Situação 2.** Suponhamos agora que existem fazendas com animais mais leves e outras com animais mais pesados que os da FAZ-2, mas que o comprador continue interessado nos animais da Faz-2.

Neste caso, somente iremos desconfiar que os animais não sejam da FAZ-2, quando o peso médio deles for muito diferente (muito inferior ou muito superior) de 155 kg. As hipóteses são escritas como:

$$\begin{cases} H_0\text{: os animais são da FAZ} - 2 \\ H_a\text{: os animais não são da FAZ} - 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0\text{: } \mu \ = \ 155 \text{ kg} \\ H_a\text{: } \mu \ \neq \ 155 \text{ kg} \end{cases}$$

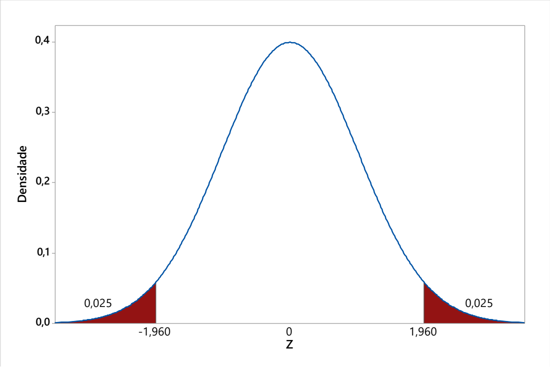
Neste caso a regra de decisão (hipótese alternativa) é chamada **bilateral** e pode escrita como:

Se $\bar{x} < \bar{x}_{c_1}$ ou $\bar{x} > \bar{x}_{c_2}$ concluímos que os animais não são da FAZ-2.
Se $\bar{x}_{c_1} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{c_2}$ concluímos que os animais são da FAZ-2.

Fixando $\alpha$ = 5%, daremos preferência aos valores críticos simétricos em relação à média $\bar{x}$. Então:

$$0{,}05 = P(\bar{x} < \bar{x}_{c_1} \text{ ou } \bar{x} > \bar{x}_{c_2} \mid \bar{x} \sim N(155{,}16) = \ldots \text{ padronizando } \ldots$$

$$= P(Z < z_{c_1}) + P(Z > z_{c_2}) \Rightarrow z_{c_1} = -1{,}96 \text{ e } z_{c_2} = 1{,}96$$



Então:

$$-1{,}96 = \frac{\bar{x}_{c_1} - 155}{\sqrt{16}} \Rightarrow \bar{x}_{c_1} = 147{,}16\text{kg}$$

$$1{,}96 = \frac{\bar{x}_{c_2} - 155}{\sqrt{16}} \Rightarrow \bar{x}_{c_2} = 162{,}84\text{kg}$$

Neste caso a <u>região crítica bilateral</u> fica:

$$RC(5\%) = \{\bar{x} \in \mathrm{R} \mid \bar{x} < 147{,}16 \text{ ou } \bar{x} > 162{,}84\}$$

Só concluiremos que os animais são da FAZ-2, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, quando o peso médio amostral $\bar{x} \in [147{,}16;\ 162{,}84]kg$.

**Resumindo:** A escolha do sinal da desigualdade que aparece na hipótese alternativa $(H_a)$ depende das informações apresentadas no problema ou da pergunta formulada na pesquisa.

**Exemplo:** Certo fazendeiro afirma que a média de produção de leite das suas vacas é superior a 30 kg/dia. Para confirmar ou não essa afirmação vamos usar uma amostra de suas vacas e testar:

$$H_0: \mu = 30$$

$$H_a: \mu > 30 \qquad \text{(afirmação do fazendeiro)}$$

**Lembre-se**: A hipótese da nulidade $(H_0)$ sempre envolve uma igualdade e a hipótese alternativa $(H_a)$ sempre envolve uma desigualdade.

## 4.1. PROCEDIMENTOS BÁSICOS PARA A CONSTRUÇÃO DE UM TESTE DE HIPÓTESE

Os procedimentos básicos para a construção de um teste de hipótese sobre o valor de um parâmetro genérico, θ, são:

$i$) Fixe a hipótese que será colocada à prova, $H_0$: $\theta = \theta_0$ (hipótese da nulidade) e escolha uma hipótese alternativa ($H_a$), que sempre incluirá uma desigualdade e será considerada verdadeira quando $H_0$ for rejeitada:

| | |
|---|---|
| $H_a$: $\theta \neq \theta_0$ | hipótese bilateral ou bicaudal |
| $H_a$: $\theta > \theta_0$ | hipótese unilateral à direita |
| $H_a$: $\theta < \theta_0$ | hipótese unilateral à esquerda |

$ii)$ Use a teoria estatística para decidir qual estatística será usada para julgar $H_0$. Por exemplo, se o parâmetro em estudo for a média $\mu$, iremos usar o estimador $\bar{x}$ e sob normalidade tem-se que $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$iii)$ Fixe $\alpha = P(Erro\ tipo\ I)$ e construa a região crítica $RC(\alpha)$ do teste. Note que a desigualdade presente na $RC(\alpha)$ terá o mesmo sinal da desigualdade que aparece em $H_a$.

$iv)$ Use as informações fornecidas pela amostra, para encontrar o valor da estatística $\hat{\theta}$ que definirá a decisão.

$v)$ Se $\hat{\theta} \in RC(\alpha)$ rejeite a hipótese $H_0$ ao nível de significância $\alpha$ e aceite a hipótese alternativa, $H_a$, como verdadeira.

Se $\hat{\theta} \notin RC(\alpha)$ aceite a hipótese $H_0$ como verdadeira.

**Notas**:

- Na maioria dos testes a hipótese alternativa $H_a$ não especifica um único valor alternativo para a média $\mu$, o que dificulta/impossibilita o cálculo de $\beta = P(Erro\ tipo\ II)$.
- É muito comum usar nos testes de hipóteses o nível de significância $\alpha$ = 0,05 = 5%.

## 4.2. TESTE PARA A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO NORMAL QUANDO A VARIÂNCIA DA POPULAÇÃO ($\sigma^2$) É CONHECIDA

As hipóteses testadas neste caso podem ser escritas como:

$H_0$: $\mu = \mu_0$

$H_a$: $\mu \neq \mu_0$ ou $H_a$: $\mu > \mu_0$, ou $H_a$: $\mu < \mu_0$

onde $\mu_0$ é um valor fixado pelo pesquisador.

A estatística do teste será $\bar{x}$, que tem distribuição $N(\mu_0, \sigma^2/n)$, o que implica em:

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0;1)$$

A seguir resolveremos um exemplo típico de teste de hipótese para a média quando <u>a variância populacional</u> ($\sigma^2$) <u>é conhecida</u>.

**Exemplo 4.2** O peso ao desmame de bezerros Nelore do Campus tem um desvio padrão populacional conhecido e igual a 12kg. Com o objetivo de testar a afirmação do zootecnista do Campus que o peso médio dos bezerros é 220 kg, sorteou-se uma amostra de 80 animais obtendo-se $\bar{x}$ = 216 kg.

Podemos confirmar a afirmação feita pelo zootecnista, ao nível de significância de 5%?

**Resolução:**

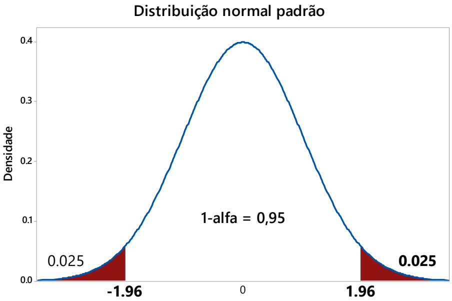
- X = "peso ao desmame de bezerros Nelore",

  X $\sim N(220, 144)$, ou seja, $\mu_X = 220$ e $\sigma_X^2 = (12)^2 = 144$

- Hipóteses a serem testadas:

$H_0$: $\mu = 220$ (o peso médio ao desmame é 220 kg)
$H_a$: $\mu \neq 220$ (o peso médio ao desmame não é 220 kg)

- Sob $H_0$ tem-se que $\bar{x} \sim N(220; 144/80)$, ou $\bar{x} \sim N(220; 1,80)$
- Da tabela da distribuição normal padrão nós temos que:




$$-1,96 = \frac{\bar{x}_{c_1} - 220}{\sqrt{1,80}} \Rightarrow \bar{x}_{c_1} = 217,37\text{kg}$$

$$1,96 = \frac{\bar{x}_{c_2} - 220}{\sqrt{1,80}} \Rightarrow \bar{x}_{c_2} = 222,63\text{kg}$$

Então

$$RC(5\%) = \{\bar{x} \in \mathrm{R}: \bar{x} < 217{,}37kg \text{ ou } \bar{x} > 222{,}63kg\}$$

Note que a $RC(5\%)$ é formada por <u>valores extremos</u>, distantes de $\mu = 220$.

- Como a média amostral, $\bar{x} = 216$ kg $\in RC(5\%)$, <u>rejeitamos</u> a hipótese $H_0$ ($\alpha = 5\%$) e concluímos que o peso médio ao desmame dos bezerros Nelore **não é igual** a 220 kg, ou seja, o zootecnista do Campus fez uma afirmação equivocada.

**Procedimento alternativo mais simples para realizar o teste:**

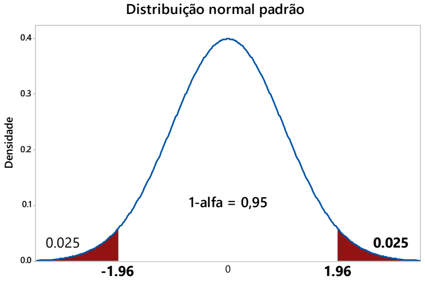
1) Escrever a $RC$ em função da variável padronizada, $Z$.
2) Calcular o valor $z_{calc}$ padronizando a média amostral, $\bar{x}$
3) Verificar se $z_{calc}$ pertence ou não $RC$ e concluir sobre a rejeição ou não de $H_0$.

No Exemplo 4.2 teríamos:

$$RC(5\%) = \{z \in \mathrm{R}: |z| > 1{,}96\}$$

Padronizando a média amostral, $\bar{x}$, teremos:

$$z_{calc} = \frac{216-220}{\sqrt{1{,}80}} = -2{,}98$$



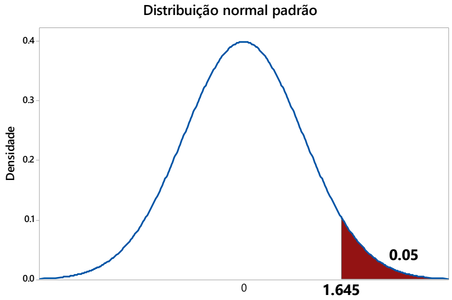
Como $z_{calc} = –2{,}98 \in RC(5\%)$ concluímos (mais uma vez!) que a hipótese $H_0$ deve ser rejeitada ao nível de 5% de significância e que podemos concluir que a afirmação do Zootecnista foi equivocada.

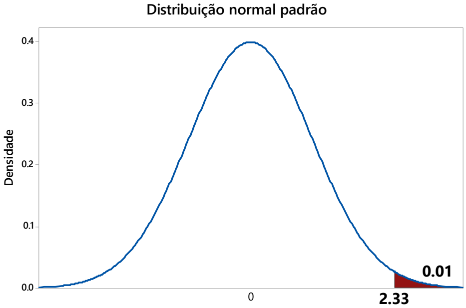
**Exemplo 4.3.** Sabe-se através de pesquisas, que o desvio padrão da produção leiteira de certa raça, no Brasil, é $\sigma$ = 2,3 kg/vaca/dia. Desejando-se testar a afirmação que a produção média do rebanho leiteiro de certo pecuarista é superior a 6,0 kg/vaca/dia, sorteou-se uma amostra de 36 vacas, obtendo-se $\bar{x}$ = 6,7 kg/vaca/dia.

Com base nesses resultados, teste a afirmação do pecuarista usando $\alpha$ = 5% e $\alpha$ = 1%.

# Resolução:

$$H_0: \mu = 6,0$$
$$H_a: \mu > 6,0 \text{ (afirmação do pecuarista)}$$




$$RC(5\%) = \{z \in \mathrm{R}: z > 1,65\}$$

$$RC(1\%) = \{z \in \mathrm{R}: z > 2,33\}$$

Da amostra temos que $\bar{x}$ = 6,7 e $n$ = 36

$$\Rightarrow z_{calc} = \frac{6{,}7-6{,}0}{2{,}3/\sqrt{36}} = 1{,}83$$

Como $z_{calc}$ pertence à $RC(5\%)$ e não pertence à $RC(1\%)$, rejeitaremos $H_0$ se assumirmos $\alpha = 5\%$, mas aceitaremos $H_0$ como verdadeira se assumirmos $\alpha = 1\%$

Ou seja, confirmaremos a afirmação do pecuarista se admitirmos $\alpha = P(\text{Erro Tipo I}) = 0{,}05$ e não confirmaremos a informação do pecuarista se admitirmos $\alpha$ = 0,01.

**Dúvida**: Como escolher o "melhor" nível de significância?

A escolha do nível de significância deve ser feita **antes** de realizar o teste e depende do risco que o pesquisador pode admitir de rejeitar erroneamente a hipótese $H_0$

Na maioria dos testes utiliza-se $\alpha$ = 0,05.

Quando rejeitamos $H_0$, indicamos entre parêntesis ($p < 0{,}05$) e quando não rejeitamos $H_0$, indicamos ($p > 0{,}05$)

## 4.3. NÍVEL DESCRITIVO DO TESTE

**Problema**: A escolha do nível de significância ($\alpha$) é arbitrária, mas deve ser feita antes de realizar a análise.

**Procedimento usado nos pacotes estatísticos:**

- Calcular a probabilidade de se obter, sob $H_0$, uma estatística de teste mais extrema do que aquela obtida na amostra, ou seja, calcular "o menor nível de significância para rejeitarmos a hipótese $H_0$, com base nos resultados amostrais".

- Este valor é chamado **nível descritivo do teste** (ou $p$-$valor$) e será denotado, neste material, por $\hat{\alpha}$.

- Para obtenção de $\hat{\alpha}$ calcula-se a probabilidade de ocorrerem valores mais extremos da estatística observada na amostra e que são mais favoráveis à rejeição de $H_0$.
- Esta é a forma que os softwares estatísticos executam qualquer teste de hipóteses: calculam o valor no nível descritivo do teste, $\hat{\alpha}$ = $p$-$valor$ e deixam que o pesquisador decida se é um valor alto ou baixo.

- Se o valor de $\hat{\alpha}$ for **pequeno** ($\hat{\alpha}$ < 5%) nós concluímos pela rejeição da hipótese $H_0$ a este nível de significância e assumimos que a hipótese $H_a$ é verdadeira.
- Se $\hat{\alpha}$ for **grande** ($\hat{\alpha}$ > 5%) nós aceitamos (ou não rejeitamos!) a hipótese $H_0$ como verdadeira.

Se pensarmos no nível descritivo do teste como o menor risco de rejeitar erroneamente $H_0$:

- Quando o risco for considerado **pequeno** ($\hat{\alpha}$ < 5%) deveremos rejeitar $H_0$.
- Quando o risco for considerado **grande** ($\hat{\alpha}$ > 5%) deveremos assumir que a hipótese $H_0$ é verdadeira e não deveremos rejeitá-la.

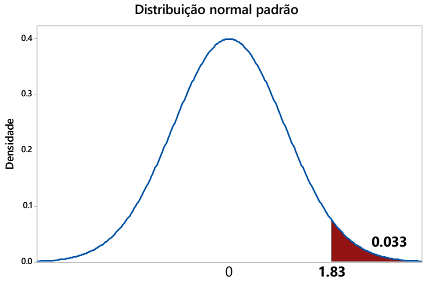
No Exemplo 4.3 podemos calcular o nível descritivo do teste para concluir sobre a afirmação do pecuarista. Lembrando que:

$H_0$: $\mu$ = 6,0

$H_a$: $\mu$ > 6,0 $\qquad\qquad$ $\bar{x}$ = 6,7 $\Rightarrow$ $z_{calc}$ = 1,83

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = P(\bar{x} > 6{,}7)$$
$$= P(Z > 1{,}83) = 0{,}033$$

Como $\hat{\alpha} = 0{,}033$ é considerado pequeno, pois é menor que 5%, nós rejeitamos $H_0$ e concluímos que a afirmação do pecuarista está correta.



## 4.4 TESTE SOBRE A MÉDIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL QUANDO A VARIÂNCIA POPULACIONAL É DESCONHECIDA

Hipóteses:

$H_0$: $\mu = \mu_0$

$H_a$: $\mu \neq \mu_0$ ou $H_a$: $\mu > \mu_0$ ou $H_a$: $\mu < \mu_0$

Como a variância populacional ($\sigma^2$) é desconhecida (o que é mais comum!) a estatística do teste é:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}} \tag{23}$$

que tem distribuição $t$-Student com $n$−1 graus de liberdade.

**Exemplo 4.4.** As mudanças observadas no teor de colesterol (mg/ 100 ml) do sangue de coelhos após o tratamento com um novo produto foram medidas em 15 coelhos. Os resultados foram:

17 18 22 20 23 22 21 19 21 24 22 17 19 19 20

Podemos afirmar que a mudança média no teor de colesterol foi inferior a 21 mg/100ml, ao nível de significância $\alpha = 0{,}05$?

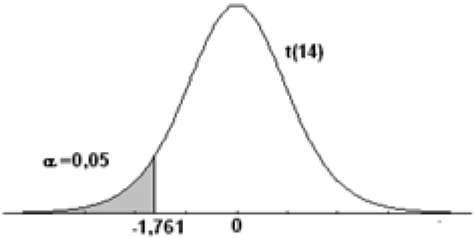
**Resolução:**

- X: "mudança no teor de colesterol no sangue de coelhos"

  Por suposição: X $\sim N(\mu, \sigma^2)$, mas $\sigma^2$ também é desconhecido.

- Hipóteses: $H_0: \mu = 21$
  $H_a: \mu < 21$

- Fixado $\alpha$ = 0,05 obtemos da Tábua III:




$$0{,}05 = P(\bar{x} < \bar{x}_c) = P(T < t_\alpha)$$

$$\Rightarrow t_\alpha = -1{,}761$$

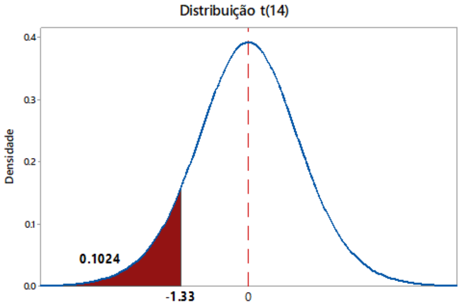
$RC(5\%)$ = $\{t \in \mathrm{R}: t < -1{,}761\}$

- Da amostra: $n$ = 15, $\bar{x} = 20{,}27$ mg/100ml e $s^2$= 4,4952

$\Rightarrow t_{calc} = \dfrac{20{,}27-21}{\sqrt{4{,}4952/_{15}}} = -1{,}33$. Como $t_{calc} = -1{,}33 \notin RC(5\%)$, não rejeitamos $H_0$ e concluímos que a mudança no teor de colesterol do sangue de coelhos <u>não foi inferior a 21 mg/100ml</u>.

Também podemos calcular o nível descritivo ($\hat{\alpha}$) *aproximado* do teste, pois a Tábua III foi construída para poucos valores de $p = P(t > t_c)$.

Neste caso procuramos na linha $\nu = 14gl$ o número mais próximo de 1,33 e encontramos o valor $t_\alpha = 1{,}345$, que está associada à probabilidade 0,10.




$$\hat{\alpha} = P(\bar{x} < 20{,}27)$$
$$= P(t < -1{,}33)$$
$$\cong 0{,}10$$

**Exercício.** Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos cigarros que fabrica apresenta-se abaixo de 23 mg por cigarro. Um laboratório realiza 10 análises desse índice obtendo:

27, 24, 21, 22, 23, 22, 21, 21, 23 e 20 mg de nicotina.

Admitindo que o índice de nicotina dos cigarros tem distribuição normal, pode-se aceitar, ao nível de significância de 10%, a afirmação do fabricante?