PTC5611 - Controle Digital de Sistemas Dinâmicos
Cap. 9: Controle Digital por Variáveis de Estado

Prof. Bruno Augusto Angélico

2021

Capítulo 9 - Controle Digital por Variáveis de Estado

As técnicas utilizadas em sistemas em tempo contínuo são diretamente empregadas em sistemas de controle digital.

1. Projeto a partir de Controladores Contínuos

- Sistema LIT em tempo contínuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

- Sistema LIT em tempo discreto:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n] \quad (3)$$
$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n], \quad (4)$$

Homepage
Página de Rosto
Página 3 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

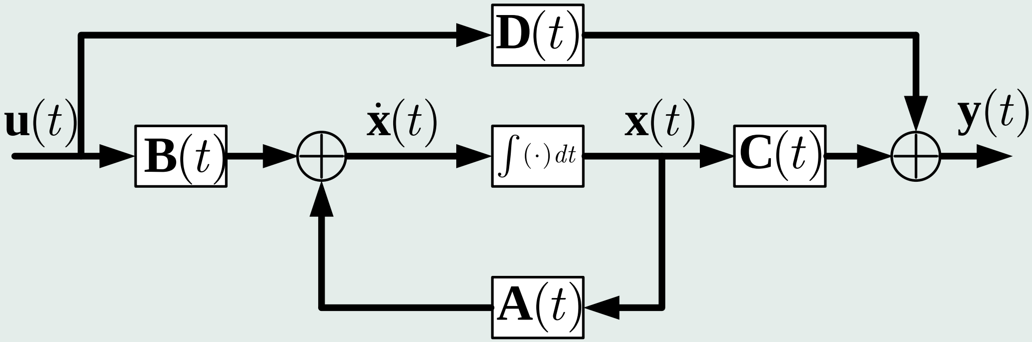


Figure 1: Diagrama de blocos de um sistema linear de tempo contínuo representado no espaço de estados.

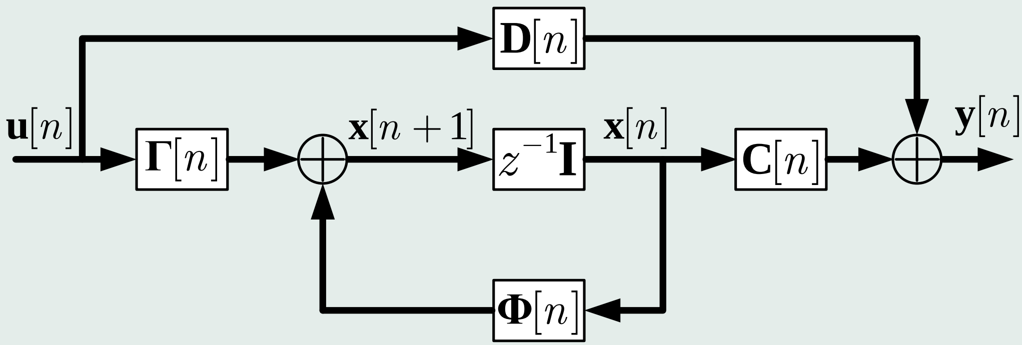


Figure 2: Diagrama de blocos de um sistema linear de tempo discreto representado no espaço de estados.

2. Matriz de Transferência Discreta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n] && (5) \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n], && (6) \end{aligned}$$

com $\mathbf{x}[n]$ sendo um vetor de k elementos, $\mathbf{y}[n]$ um vetor de m elementos, $\mathbf{\Phi}$ uma matriz $k \times k$, $\mathbf{\Gamma}$ uma matriz $k \times r$, $\mathbf{C}$ uma matriz $m \times r$ e $\mathbf{D}$ uma matriz $m \times r$. Aplicando a transformada-z:

$$\begin{aligned} z\mathbf{X}(z) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{X}(z) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{U}(z) && (7) \\ \mathbf{y}(z) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z), && (8) \end{aligned}$$

Isolando $\mathbf{X}(z)$ em (10) e substituindo em (11), chega-se em:

$$\mathbf{Y}(z) = \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(z). \tag{9}$$

Logo,

$$\mathbf{G}(z) = \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D}\right] \tag{10}$$

A matriz $\mathbf{G}(z)$, de dimensão $(m \times r)$ é conhecida como matriz de transferência discreta e caracteriza a dinâmica de entrada-saída do sistema em tempo discreto modelado em (15)-(16).

Como

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})}{|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}|} \tag{11}$$

com $\text{adj}(\mathbf{M})$ sendo a matriz adjunta da matriz $\mathbf{M}$[1].

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{C}\,\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})\,\mathbf{\Gamma}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}|} + \mathbf{D} \tag{12}$$

Observa-se que os polos de $\mathbf{G}(z)$ são os autovalores de $\mathbf{\Phi}$.

[1] A matriz adjunta de uma matriz quadrada $\mathbf{M}$ é a transposta da matriz que se obtém substituindo-se cada termo $\mathbf{M}_{i,j}$ pelo determinante da matriz obtida retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de $\mathbf{M}$, multiplicado por $(-1)^{i+j}$

3. Discretização de Equações de Estado Contínuas

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (13)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n] \quad (15)\\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n], \quad (16)\end{aligned}$$

$$\mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{A}T_s}, \quad \mathbf{\Gamma} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}\,\eta}\, d\eta\, \mathbf{B}$$

No MATLAB, o comando `c2d` pode ser utilizado para encontrar a representação discreta, da seguinte forma: `[Phi,Gamma] = c2d(A,B,Ts)`.

4. Controlabilidade e Observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman e possuem um papel importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados.

- **Controlabilidade**:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}u[n], \tag{17}$$

$\mathbf{x}[n]$: vetor de estado (k elementos);

$\mathbf{u}[n]$: vetor de entrada (r elementos);

$\mathbf{\Phi}$: matriz $k \times k$;

$\mathbf{\Gamma}$: matriz $k \times r$;

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \left[\, \mathbf{\Gamma} \;\middle|\; \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{\Phi}^{k-1}\mathbf{\Gamma} \,\right], \tag{18}$$

Para que o sistema seja totalmente controlável, $\mathcal{C}$ deve possuir posto (*rank*) k. Tal matriz é denominada **matriz de controlabilidade**.

- **Observabilidade**:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] \tag{19}$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] \tag{20}$$

onde

$\mathbf{x}[n]$: vetor de estado (k elementos);

$\mathbf{y}[n]$: vetor de saída (m elementos);

$\mathbf{\Phi}$: matriz $k \times k$;

$\mathbf{C}$: matriz $m \times k$;

Para um sistema ser completamente observável, a matriz $km \times k$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{CG} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{CG}^{k-1} \end{bmatrix}, \qquad (21)$$

deve possuir posto k.

4.1. Controle por Realimentação de Estados

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{\Phi x}[n] + \mathbf{\Gamma u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{Cx}[n] \end{aligned} \qquad (22)$$

Se o sistema for controlável, é possível determinar uma matriz de ganhos $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r,k}$ de realimentação de estados, tal que a lei de controle $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$, garanta alocação arbitrária dos polos do sistema em malha fechada.

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_c\mathbf{x}[n] \tag{23}$$

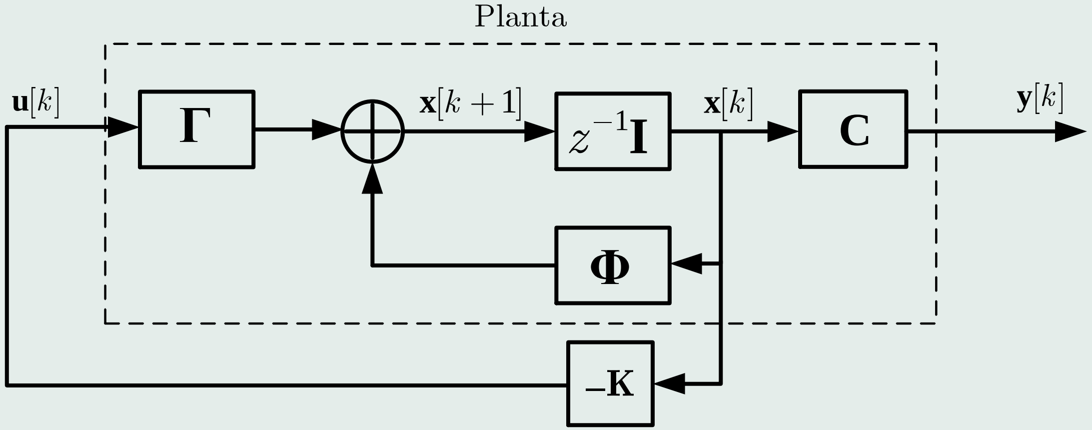


Figure 3: Diagrama do sistema com realimentação de estados.

A equação característica do sistema descrito em (23) é dada por

$$\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}\right) = 0 \tag{24}$$

Se que a posição desejada dos polos de malha fechada é conhecida, tal que

$$p_c(z) = (z - p_1)\cdot(z - p_2)\cdots(z - p_k)\,, \tag{25}$$

e se o par $(\mathbf{\Phi},\, \mathbf{\Gamma})$ for completamente controlável, então existe $\mathbf{K}$, tal que

$$\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}\right) = p_c(z)$$

para qualquer polinômio $p_c(z)$ de grau k especificado.

No MATLAB:

- `acker`: apresenta resultado satisfatório para sistemas de ordem menor ou igual a 10. É capaz de alocar polos com multiplicidade. Não se aplica a sistemas MIMO. Sintaxe: `K_c = acker(Phi,Gamma,p_c)`.

- `place`: pode ser utilizado satisfatoriamente para sistemas MIMO, como a mesma sintaxe do comando `acker`. No entanto, não é capaz de alocar polos com multiplicidade mairo do que o posto de $\mathbf{\Gamma}$.

4.2. Projeto de Observadores

Na impossibilidade de realimentar os estados reais, a ideia é fazer $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$. Considere novamente a seguinte representação

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}u[n] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n] \end{aligned} \tag{26}$$

Note que na Figura 4 o estimador não está utilizando qualquer medida do sistema real, o que pode fazer com que a estimativa divirja do valor desejado. Para corrigir o erro de estimação, pode-se utilizar uma realimentação deste erro, como mostrado na Figura

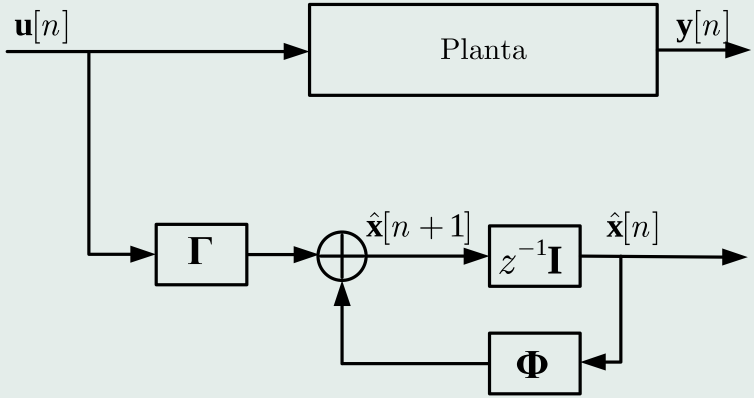


Figure 4: Diagrama do estimador em malha aberta.

5, onde $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{k,m}$.

E equação do estimador é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}[n+1] &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{\Gamma}u[n] + \mathbf{L}(y[n] - \hat{y}[n]) \\ &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{\Gamma}u[n] + \mathbf{LC}(\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n])\end{aligned} \tag{27}$$

Ao definir $\tilde{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]$, tem-se

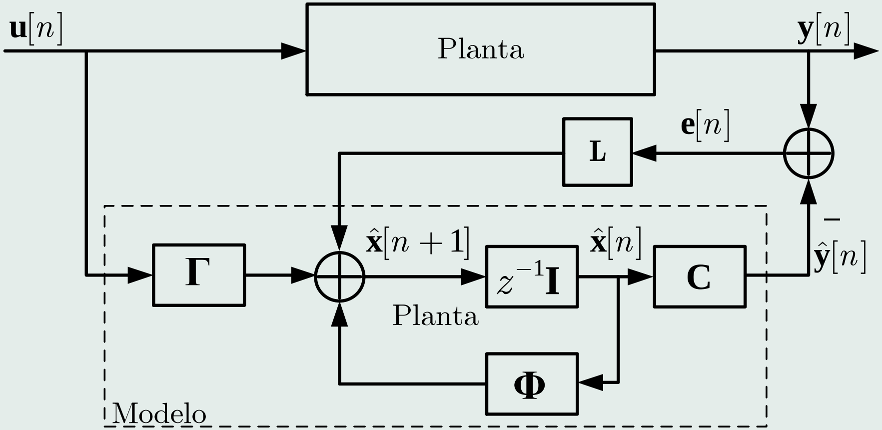


Figure 5: Diagrama do estimador de predição em malha fechada.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}[n+1] &= \mathbf{x}[n+1] - \hat{\mathbf{x}}[n+1] = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) - \mathbf{LC}\tilde{x}[n] \\ &= (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC})\tilde{x}[n] \qquad (28)\end{aligned}$$

- Se o sistema for completamente observável, pode-se dar a $\tilde{\mathbf{x}}[n]$ o desempenho desejado.
- Note que o erro de estimação depende dos autovalores de $(\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC})$.
- **Estimador Assintótico de Estados**: Se estes autovalores são estáveis, o erro tende a zero assintoticamente.
- Os polos do observador devem possuir dinâmica mais rápida que os do sistema de controle em malha fechada.

Se o sistema for completamente observável, então existe $\mathbf{L}$, tal que

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{LC}) = p_o(z)$$

para qualquer polinômio $p_o(z)$ de grau n especificado.

Note que o projeto do observador consiste em resolver o problema de alocação de polos para o sistema

$$\mathbf{z}[n+1] = \mathbf{\Phi}^\top \mathbf{z}[n] + \mathbf{C}^\top V[n] \tag{29}$$

pois os autovalores de $(\mathbf{\Phi}^\top - \mathbf{C}^\top \mathbf{L}^\top)$ são os mesmos de $(\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC})$.

No MATLAB: `L = place(Phi',C',p_o)'`, sendo `Phi`, `C` as matrizes de estado e de saída, e `p_o` o vetor com a posição dos polos desejada.

4.2.1. Estimador de Ordem Reduzida

Considere que $\mathbf{x}_b$ (m elementos) representa parte do vetor de estados medida diretamente na saída, e $\mathbf{x}_a$ ($k - m$ elementos) a parcela a ser estimada.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_a[n+1]\\ \mathbf{x}_b[n+1]\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_{aa} & \mathbf{\Phi}_{ab}\\ \mathbf{\Phi}_{ba} & \mathbf{\Phi}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_a[n]\\ \mathbf{x}_b[n]\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}_a\\ \mathbf{\Gamma}_b\end{bmatrix}\mathbf{u}[n]\\ \mathbf{y}[n] &= \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_a[n]\\ \mathbf{x}_b[n]\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{30}$$

A dinâmica da parcela não medida é dada por

$$\mathbf{x}_a[n+1] = \mathbf{\Phi}_{aa}\mathbf{x}_a[n] + \underbrace{\mathbf{\Phi}_{ab}\mathbf{x}_b[n] + \mathbf{\Gamma}_a\mathbf{u}[n]}_{\text{entrada equivalente}} \tag{31}$$

Já para a parcela medida, tem-se

$$\mathbf{x}_b[n+1] = \mathbf{\Phi}_{bb}\mathbf{x}_b[n] + \mathbf{\Phi}_{ba}\mathbf{x}_a[n] + \mathbf{\Gamma}_b\mathbf{u}[n], \tag{32}$$

que pode ser rearranjada como

$$\underbrace{\mathbf{x}_b[n+1] - \mathbf{\Phi}_{bb}\mathbf{x}_b[n] - \mathbf{\Gamma}_b\mathbf{u}[n]}_{\text{medidas conhecidas}} = \mathbf{\Phi}_{ba}\mathbf{x}_a[n]. \tag{33}$$

Homepage
Página de Rosto
Página 20 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Considere a Equação (27) do estimador, bem como as seguintes equivalências:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &\leftarrow \mathbf{x}_a \\
\mathbf{\Phi} &\leftarrow \mathbf{\Phi}_{aa} \\
\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n] &\leftarrow \mathbf{\Phi}_{ab}\mathbf{x}_b[n] + \mathbf{\Gamma}_a\mathbf{u}[n] \\
\mathbf{y}[n] &\leftarrow \mathbf{x}_b[n+1] - \mathbf{\Phi}_{bb}\mathbf{x}_b[n] - \mathbf{\Gamma}_b\mathbf{u}[n] \\
\mathbf{C} &\leftarrow \mathbf{\Phi}_{ba} \\
\mathbf{L} &\leftarrow \mathbf{L}_r
\end{aligned}
$$

$C\hat{x}[n]$

Assim, (27) pode ser adaptada para

$\hat{x}[n+1] = \Phi\hat{x}[n] + \Gamma u[n] + L(y[n] - \hat{y}[n])$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_a[n+1] = \; & \mathbf{\Phi}_{aa}\hat{\mathbf{x}}_a[n] + \mathbf{\Phi}_{ab}\mathbf{x}_b[n] + \mathbf{\Gamma}_a\mathbf{u}[n] + \\
& \mathbf{L}_r(\mathbf{x}_b[n+1] - \mathbf{\Phi}_{bb}\mathbf{x}_b[n] - \mathbf{\Gamma}_b\mathbf{u}[n] - \mathbf{\Phi}_{ba}\hat{\mathbf{x}}_a[n])
\end{aligned} \tag{34}
$$

Mas,

$$
\mathbf{x}_a[n+1] = \mathbf{\Phi}_{aa}\mathbf{x}_a[n] + \mathbf{\Phi}_{ab}\mathbf{x}_b[n] + \mathbf{\Gamma}_a\mathbf{u}[n] \tag{35}
$$

Ao subtrair (34) de (35) e definir $\tilde{\mathbf{x}}_a[n] = \mathbf{x}_a[n] - \hat{\mathbf{x}}_a[n]$, chega-se em:

$\Phi_{ba} x_a[n]$

$$\tilde{\mathbf{x}}_a[n+1] = \mathbf{\Phi}_{aa}\tilde{\mathbf{x}}_a[n] - \mathbf{L}_r\left(\mathbf{x}_b[n+1] - \mathbf{\Phi}_{bb}\mathbf{x}_b[n] - \mathbf{\Gamma}_b\mathbf{u}[n] - \mathbf{\Phi}_{ba}\hat{\mathbf{x}}_a[n]\right) \tag{36}$$

Ao substituir (32) em (36) e efetuar as devidas simplificações, tem-se que

$\Phi - LC$

$$\tilde{\mathbf{x}}_a[n+1] = \left(\mathbf{\Phi}_{aa} - \mathbf{L}_r\mathbf{\Phi}_{ba}\right)\tilde{\mathbf{x}}_a[n] \tag{37}$$

Em [Gopinath, 1977] é provado que se o observador de ordem completa da Equação (27) existir, então o estimador de ordem reduzida da Equação (34) também existe, ou seja, as raízes da equação característica dada por

$L = \text{place}(\Phi', C', po)'$

$$\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_{aa} + \mathbf{L}_r\mathbf{\Phi}_{ba}\right) = 0 \tag{38}$$

podem ser alocadas de forma arbitrária.

No MATLAB: `L_r = place(Φ_aa',Φ_ba',p_or)'`, onde `p_or` é a posição desejada dos polos do observador de ordem reduzida.

Se a ordem do observador de ordem reduzida for a mínima possível, o observador é denominado **observador de ordem mínima**.

Note que em (34), $\hat{\mathbf{x}}_a[n+1]$ depende de $\mathbf{x}_b[n+1]$. Para escrever a equação de diferenças de uma forma mais conveniente, efetua-se uma manipulação em (34), tal que: $\hat{z}[n] = \hat{x}_a[n] - L_r x_b[n]$

$$\underbrace{\hat{\mathbf{x}}_a[n+1] - \mathbf{L}_r\mathbf{x}_b[n+1]}_{\hat{z}[n+1]} = (\boldsymbol{\Phi}_{aa} - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Phi}_{ba})\,\hat{\mathbf{x}}_a[n] + (\boldsymbol{\Phi}_{ab} - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Phi}_{bb})\,\mathbf{x}_b[n] + (\boldsymbol{\Gamma}_a - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Gamma}_b)\,\mathbf{u}[n] \quad (39)$$

Ao subtrair e somar o termo $(\boldsymbol{\Phi}_{aa} - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Phi}_{ba})\,\mathbf{L}_r\mathbf{x}_b[n]$ do lado direito de (39), e definir $\hat{\mathbf{z}}[n] = \hat{\mathbf{x}}_a[n] - \mathbf{L}_r\mathbf{x}_b[n]$, chega-se em:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}}[n+1] &= (\boldsymbol{\Phi}_{aa} - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Phi}_{ba})\,\hat{\mathbf{z}}[n] + (\boldsymbol{\Phi}_{aa} - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Phi}_{ba})\,\mathbf{L}_r\mathbf{x}_b[n] + \\ &\quad (\boldsymbol{\Phi}_{ab} - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Phi}_{bb})\,\mathbf{x}_b[n] + (\boldsymbol{\Gamma}_a - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Gamma}_b)\,\mathbf{u}[n] \qquad (40)\end{aligned}$$

Assim, a equação de diferenças (40) pode ser utilizada para representar a dinâmica do estimador de ordem reduzida. A lei de controle por realimentação de estados é então dada por:

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_a[n] \\ \mathbf{x}_b[n]\end{bmatrix} = -\mathbf{K}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{z}}[n] + \mathbf{L}_r \cdot \mathbf{y}[n] \\ \mathbf{y}[n]\end{bmatrix} \tag{41}$$

Com isso, pode-se ter a representação da Figura 6.

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 24 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

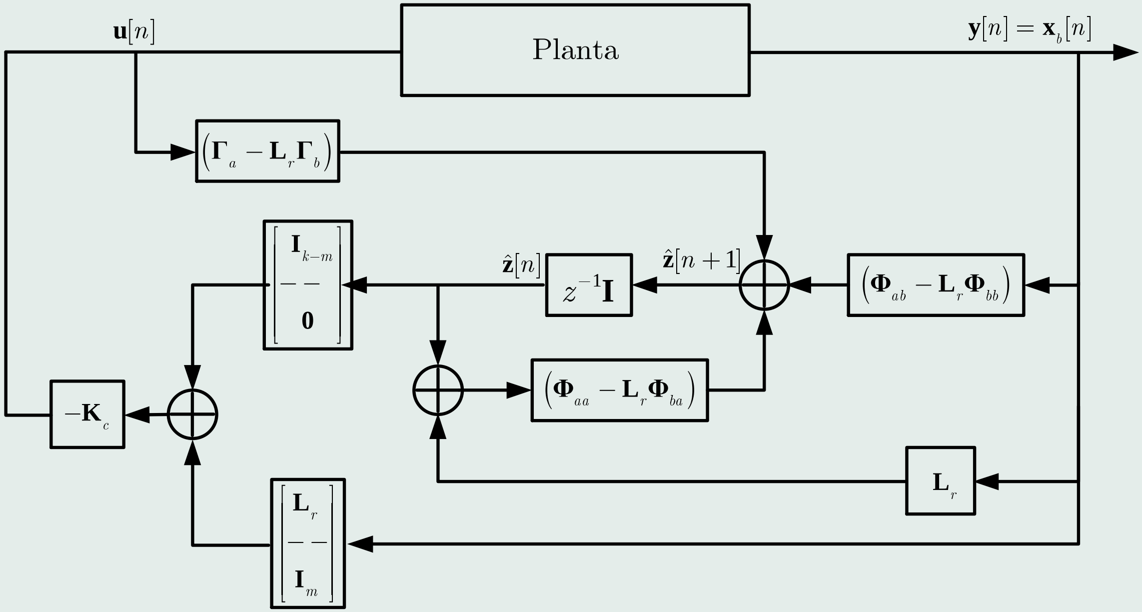


Figure 6: Diagrama do estimador ordem reduzida.

5. Princípio da Separação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \tilde{\mathbf{x}}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Phi} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[n] \\ e[n] \end{bmatrix} \tag{42}$$

- Os autovalores desse sistema aumentado são dados pelos autovalores de $(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K})$ e $(\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC})$.
- Os ganhos $\mathbf{K}$e $\mathbf{L}$ podem ser calculados separadamente (*Princípio da Separação*).
- os polos de $\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC}$ devem possuir modulo menor que os polos de $\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K}$;

6. Problema de Rastreamento

Esquemas como o da Figura 3 são reguladores que levam o estado do sistema a zero a partir de qualquer condição inicial, com velocidade determinada pela equação característica do sistema em mala fechada. No entanto, caso as saídas do sistema precisem seguir uma referência com erro assintótico nulo (rastreamento), não se pode garantir a ausência de erro em regime pela realimentação de polos.

6.1. Realimentação Estados com Entrada de Referência

Considere o diagrama em blocos da Figura 7, e que o sistema possua o mesmo número de entradas e saídas, $\mathbf{r}[n] \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $\mathbf{y}[n] \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

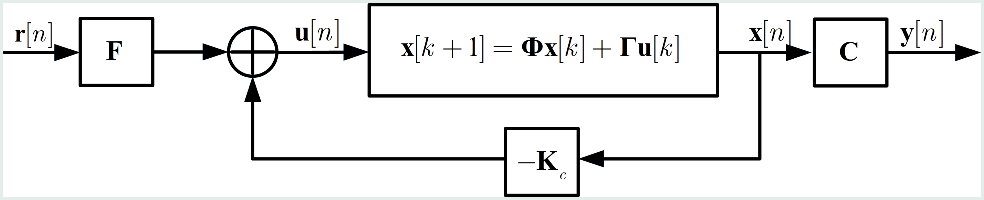


Figure 7: Realimentação de estados com entrada de referência.

A alocação de polos geralmente altera o ganho total do sistema, o que sugere o uso de um pré-filtro $\mathbf{F}$ $(m \times m)$ para ajustar saída quando há uma variação degrau na referência.

O sistema em malha fechada é regido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K}_c)\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{F}\,\mathbf{r}[n] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n] \end{aligned} \tag{43}$$

Na condição de regime permanente, tem-se

$$\mathbf{x}_{ss} = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K}_c)\,\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{F}\,\mathbf{r}_{ss} \tag{44}$$

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 28 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

e,

$$\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} \tag{45}$$

De (44) segue que:

$$\mathbf{x}_{ss} = \left(\mathbf{I}_{k,k} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_c\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{F}\mathbf{u}_{ss} \tag{46}$$

Logo,

$$\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I}_{k,k} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_c\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{F}\,\mathbf{r}_{ss} \tag{47}$$

Para a condição de erro nulo em regime permanente, tem-se $\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{r}_{ss}$. Isso ocorre se:

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{I}_{k,k} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_c\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{F} = \mathbf{I}_{m\times m}. \tag{48}$$

Assim, a equação do pré-filtro resulta em:

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{C}\left(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_c\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}\right)^{-1}. \tag{49}$$

Outra forma de resolver este problema consiste em utilizar a estrutura da Figura 8.

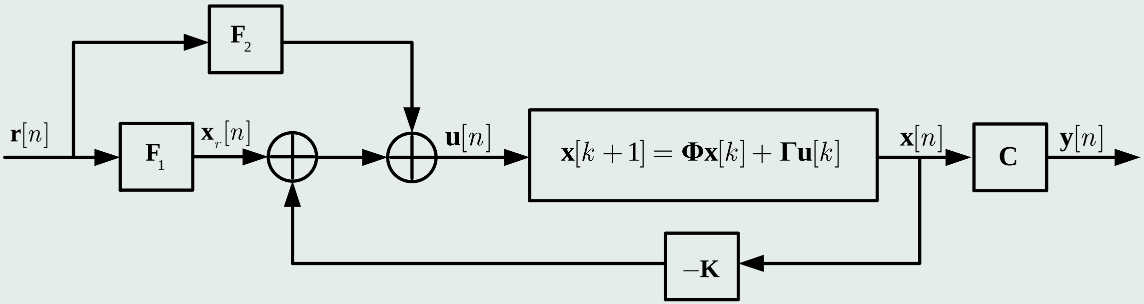


Figure 8: Realimentação de estados com entrada de referência.

Deseja-se que

$$\mathbf{F}_1\mathbf{r} = \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_{ss}, \tag{50}$$

e que

$$\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{r}, \tag{51}$$

ou seja,

$$\mathbf{C}\mathbf{F}_1\mathbf{r} = \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{F}_1 = \mathbf{I}_{m\times m}. \tag{52}$$

Em regime estacionário, tem-se ainda que

$$\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_{ss} \Rightarrow \left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{I}_{k,k}\right)\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_{ss} = 0. \tag{53}$$

Como em regime estacionário $\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{F}_2\mathbf{r}$, tem-se que

$$\left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{I}_{k,k}\right)\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{F}_2\mathbf{r} = 0. \tag{54}$$

De (52) e (54), pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{I}_{k,k}\right) & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{m\times m} \end{bmatrix} \tag{55}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{I}_{k,k}\right) & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{m\times m} \end{bmatrix} \tag{56}$$

6.2. Inserção de Integrador

Muitas vezes é necessária a inserção de integradores na malha de controle. Uma forma de inserir um integrador consiste em introduzir um novo vetor de estados que integre o erro entre o vetor de saída $\mathbf{y}$ e o vetor de comando de entrada $\mathbf{r}$, ambos com m elementos, como apresentado no diagrama da Figura 9.

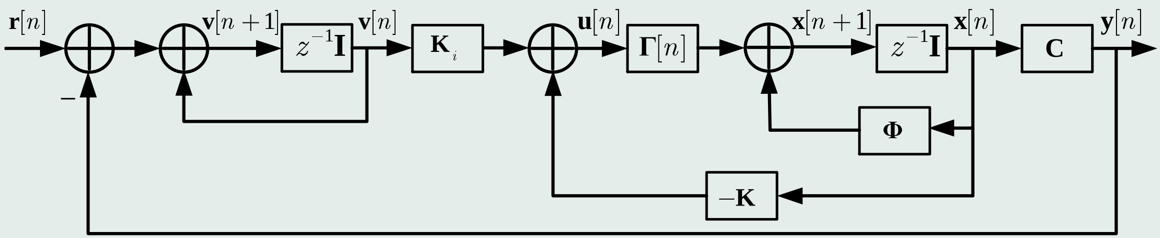


Figure 9: Servossistema com realimentação de estados e e controle integral.

A equação de estados do integrador inserido é dada por

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{v}[n]+\mathbf{r}[n]-\mathbf{y}[n] \Rightarrow \mathbf{v}[n+1] = \mathbf{v}[n]+\mathbf{r}[n]-\mathbf{C}\mathbf{x}[n] \quad (57)$$

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 32 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

A equação de estados do sistema em malha fechada é dada por:

$$\mathbf{x}[n+1] = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K})\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma K}_i \mathbf{v}[n] \tag{58}$$

Tem-se, portanto, a seguinte equação para o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \mathbf{v}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K} & \mathbf{\Gamma K}_i \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_{m\times m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{v}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{m\times m} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}[n], \tag{59}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \mathbf{v}[n+1] \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_{m\times m} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{\Phi}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0}_{k\times k} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{\Gamma}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{v}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{I}_{m\times m} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}[n] \tag{60}$$

Com isso, basta determinar o ganho $\hat{\mathbf{K}}$ que aloca os polos para o sistema aumentado da Equação (60).

6.3. Estimador pelo Valor Atual

Pode-se projetar um estimador no instante n para uma medida de saída no instante n, tal como apresentado na Equação (61).

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{L}_c(\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[n]), \tag{61}$$

onde $\bar{\mathbf{x}}[n]$ é dado por $x[n] = \Phi x[n-1] + \Gamma u[n-1]$

$$\bar{\mathbf{x}}[n] = \boldsymbol{\Phi}\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}[n-1], \tag{62}$$

Ao substituir (62) em (61), verifica-se que

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \boldsymbol{\Phi}\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}[n-1] + \mathbf{L}_c\mathbf{C}(\mathbf{x}[n] - \bar{\mathbf{x}}[n]), \tag{63}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[n] - \bar{\mathbf{x}}[n] &= (\boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}[n-1] + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}[n-1]) - (\boldsymbol{\Phi}\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}[n-1]) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{x}}[n-1]\end{aligned} \tag{64}$$

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 34 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Assim,

$$x[n] = \Phi x[n-1] + \Gamma u[n-1]$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n-1] + \mathbf{L}_c\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{x}}[n-1] \tag{65}$$

Portanto, o erro ode estimação possui a seguinte dinâmica

$$\tilde{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n] = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}_c\mathbf{C}\mathbf{\Phi})\tilde{\mathbf{x}}[n-1] \tag{66}$$

Sintaxe com o comando place: `L = place(Phi',Φ'C',p_o)'`.

A Figura 10 ilustra o diagrama em blocos do sistema com realimentação de estados utilizando o estimador do valor atual

$$\check{x}[n+1] = (\Phi - LC)\check{x}[n]$$

$$L = \text{place}(\Phi', C', p_o)'$$

$$L_c = \text{place}(\Phi', \Phi' C', \ldots)'$$

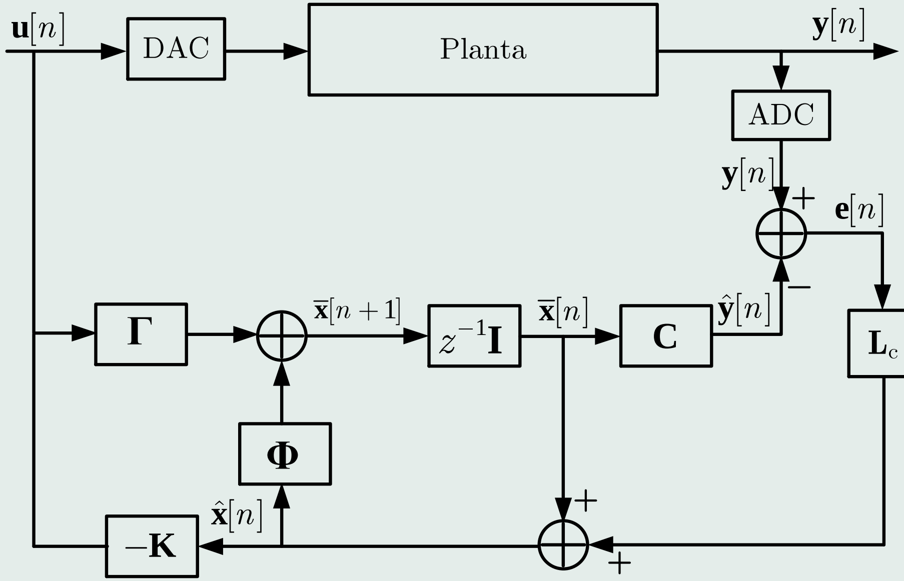


Figure 10: Diagrama do estimador de valor atual com o controle em malha fechada.

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 36 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

✍ **Exemplo 1:** Considere o sistema dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,6}{s(s+0,7)}$$

Projete um controlador digital por realimentação de estados de forma que o sistema em malha fechada apresente $w_n = 5,0$; $\zeta = 0,7$. Assuma $f_s = 20$Hz. Considere ainda: a) realimentação com todos os estados medidos; b) realimentação com todos os estados estimados e preditor; c) realimentação de estados com estimador de ordem reduzida e preditor; d) realimentação de estados com todos os estados estimados e estimador de valor atual.

Solução: Note que,

$$\ddot{y} + 0,7\dot{y} = 0,6u$$

Define-se $x_1 = \dot{y}$ e $x_2 = y$. Assim, $\dot{x}_1 = \ddot{y} = -0,7x_1 + 0,6u$. Portanto,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0,7 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0,6\\ 0\end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

O restante do exercício será resolvido diretamente no Matlab:

```
clear all; clc; close all;
fs=20; Ts=1/fs;
K_G = 0.6; %Numerador da F. T.
A = [-0.7 0; 1 0]; B = [0.6; 0]; C = [0 1]; D = 0;
[Phi,Gamma] =  c2d(A,B,Ts);
wn = 5.0; zeta = 0.7; s1 = wn*(-zeta+j*sqrt(1-zeta^2));
p_c = exp([s1; s1']*Ts); %Polos do sist. de controle em MF
```

```
wn2 = 10.0; xsi2 = 0.707; s2 = wn2*(-xsi2+j*sqrt(1-xsi2^2));
p_o = exp([s2; s2']*Ts); %Polos do sist. observador completo
p_or = real(p_o(1)); %Polos do sist. observador de ord. reduzida
K = place(Phi,Gamma,p_c); % Projeto do Controlador
F = inv(C*inv(eye(2) - Phi + Gamma * K) * Gamma); % Pré-filtro
item = 'd'; %seleciona o item
switch(item)
case 'a' %realimentação de estados medidos
sim('SIM_EX1_CHAP_09_a');
case 'b' %realimentação de estados estimados (observador ordem completa)
L = place(Phi',C',p_o)'; % Projeto do observador ordem completa
sim('SIM_EX1_CHAP_09_b');
case 'c' %realimentação de estados estimados (observador ordem mínima)
Phi_aa = Phi(1,1);  Phi_ba = Phi(2,1);
%Lr = place(Phi_aa',Phi_ba',p_or)'; % Projeto do observador ordem mínima
```

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 38 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

```
Lr = (Phi_aa - p_or)/Phi_ba;
sim('SIM_EX1_CHAP_09_c');
case 'd'
Lc = place(Phi', (C*Phi)',p_o)';
sim('SIM_EX1_CHAP_09_d');
otherwise
error('item precisa ser ''a'', ''b'', ''c'' ou ''d'' ');
end
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2); t_d = (0:length(x_1)-1)*Ts;
figure(5); subplot(2,1,1); plot(t,r,'b',t,y,'r');
xlabel('$t$','Interpreter','latex');  ylabel('Amplitude','Interpreter','lat
leg=legend('Setpoint','Saida');
set(leg,'Interpreter','latex','Location','best');
subplot(2,1,2); stairs(t_d,x_1,'b');hold on; stairs(t_d,x_2,'r');
xlabel('$n T_s$','Interpreter','latex');
ylabel('Amplitude','Interpreter','latex')
leg=legend('$x_1(n T_s)$','$x_2(n T_s)$');
set(leg,'Interpreter','latex','Location','best');
figure(6); stairs(t_d, u);
xlabel('$n T_s$','Interpreter','latex');
ylabel('$u(n T_s)$','Interpreter','latex');
```

Os diagramas de simulação dos itens a), b), c) e d) são apresentados nas Figuras 11, 12 e 14, respectivamente. Os códigos das `Matlab Functions` de cada exemplo são apresentados a seguir:

```
%a) realimentação de estados medidos
function u = fcn(r, x_1, x_2, K, F)
%#eml
u = F*r-(K(1)*x_1 + K(2)*x_2);
```

```
%b) realimentação de estados observados (observador ordem completa preditor
function [u, x_chap_1, x_chap_2] = fcn(r, y, K, L, F, Phi, Gamma, C)
%#eml
global x_chap_1_ant; global x_chap_2_ant;
u = F*r-(K(1)*x_chap_1_ant + K(2)*x_chap_2_ant);
y_chap = C(1)*x_chap_1_ant+C(2)*x_chap_2_ant;
x_chap_1 = Phi(1,1)*x_chap_1_ant + Phi(1,2)*x_chap_2_ant + ...
Gamma(1)*u + L(1)*(y - y_chap);
x_chap_2 = Phi(2,1)*x_chap_1_ant + Phi(2,2)*x_chap_2_ant + ...
Gamma(2)*u + L(2)*(y - y_chap);
x_chap_1_ant = x_chap_1; x_chap_2_ant = x_chap_2;
```

```
%c) realimentação de estados observados (observador ordem mínima preditor)
function [u, x_chap_1] = fcn(r, y, K, Lr, F, Phi, Gamma, C)
%#eml
Phi_aa = Phi(1,1); Phi_ab = Phi(1,2);
Phi_ba = Phi(2,1); Phi_bb = Phi(2,2);
Gamma_a = Gamma(1); Gamma_b = Gamma(2);
global z_chap_ant;
x_2 = y;
x_chap_1 = z_chap_ant+Lr*y;
x_1 = x_chap_1;
```

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 40 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

```
u = F*r-(K(1)*x_1 + K(2)*x_2);
z_chap = (Phi_aa-Lr*Phi_ba)*z_chap_ant +(Phi_aa-Lr*Phi_ba)*Lr*x_2 +...
(Phi_ab-Lr*Phi_bb)*x_2 + (Gamma_a - Lr*Gamma_b)*u;
z_chap_ant = z_chap;
```

```
%d) realimentação de estados observados (observador ordem completa e valor
function [u, x_chap_1, x_chap_2] = fcn(r, y, K, Lc, F, Phi, Gamma, C)
%#eml
global x_bar_1; global x_bar_2;
x_chap_1 = x_bar_1 + Lc(1)*(y - (C(1)*x_bar_1 + C(2)*x_bar_2));
x_chap_2 = x_bar_2 + Lc(2)*(y - (C(1)*x_bar_1 + C(2)*x_bar_2));
u = F*r-(K(1)*x_chap_1 + K(2)*x_chap_2);
x_bar_1 = Phi(1,1)*x_chap_1 +Phi(1,2)*x_chap_2 + Gamma(1)*u;
x_bar_2 = Phi(2,1)*x_chap_1 +Phi(2,2)*x_chap_2 + Gamma(2)*u;
```

Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 15 a 18.

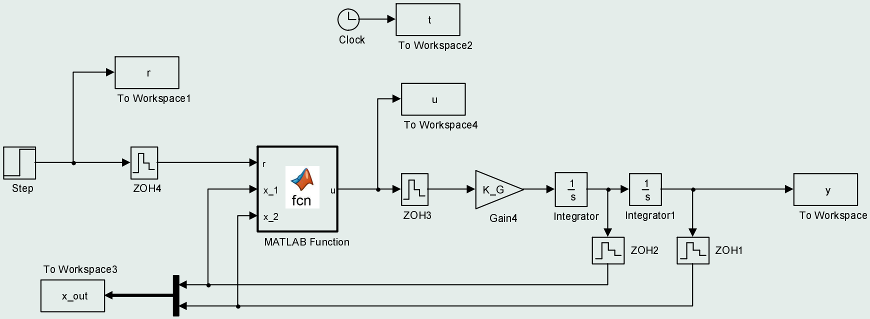


Figure 11: Diagrama de simulação do Exemplo .1 a.

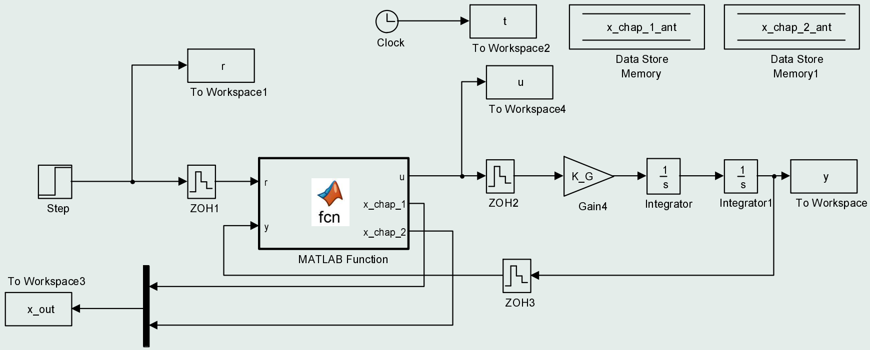


Figure 12: Diagrama de simulação do Exemplo .1 b.

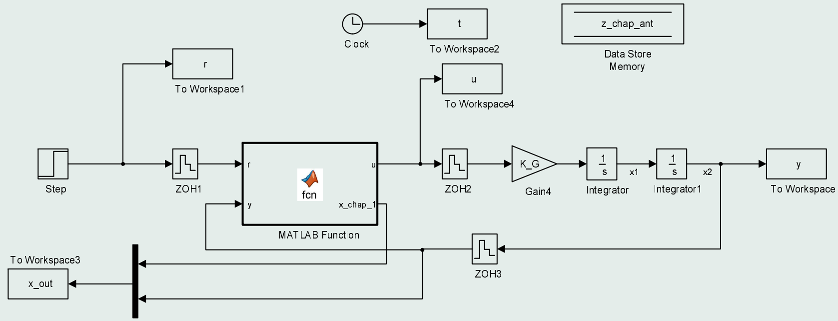


Figure 13: Diagrama de simulação do Exemplo .1 c.

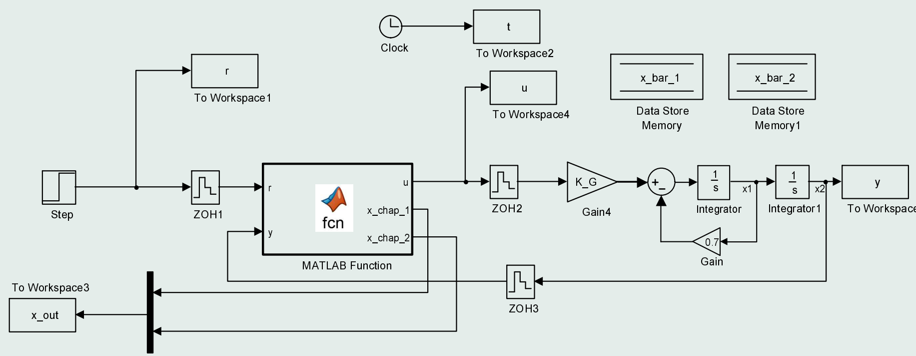


Figure 14: Diagrama de simulação do Exemplo .1 d.

✍ **Exemplo 2:** Considere o sistema dada por

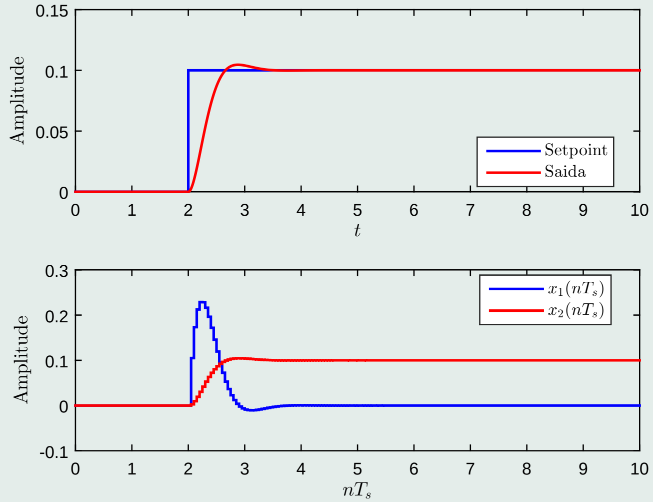
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

Adicione um integrador ao sistema e projete um controle digital por realimentação de estados para o sistema aumentado. Assuma $f_s = 20$ Hz e as seguintes especificações para os polos dominantes de malha fechada: $\omega_n = 5,71$; $\zeta = 0,7$.

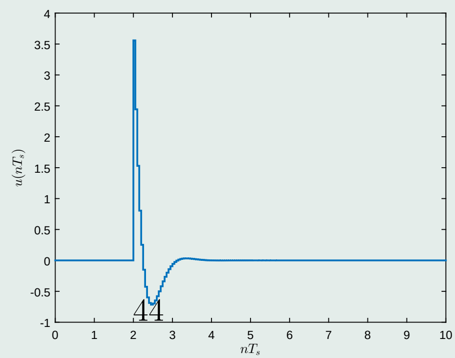
Solução: Ao definir $x_2 = y$ e $x_1 = \dot{y}$, tem-se a seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

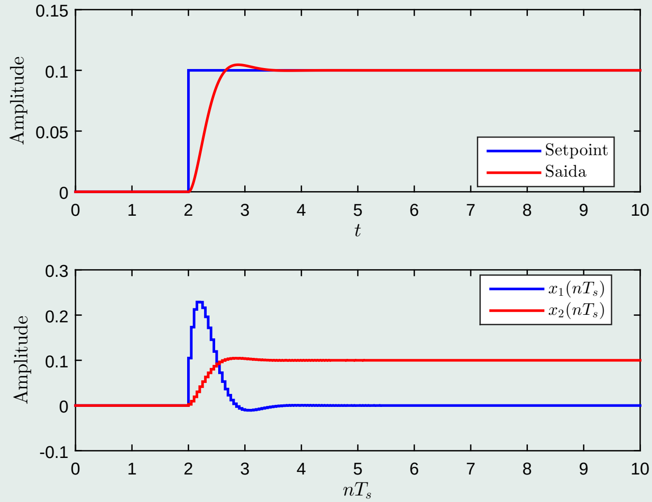
O restante do exercício será resolvido diretamente no Matlab:



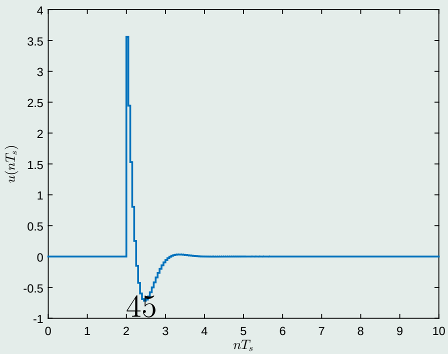
(a) Saída e Estados



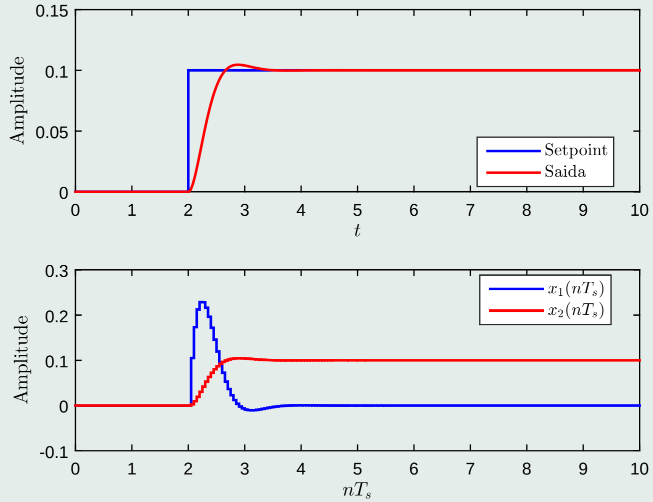
(b) Sinal de Controle



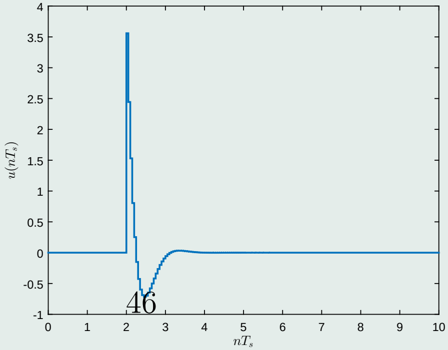
(a) Saída e Estados



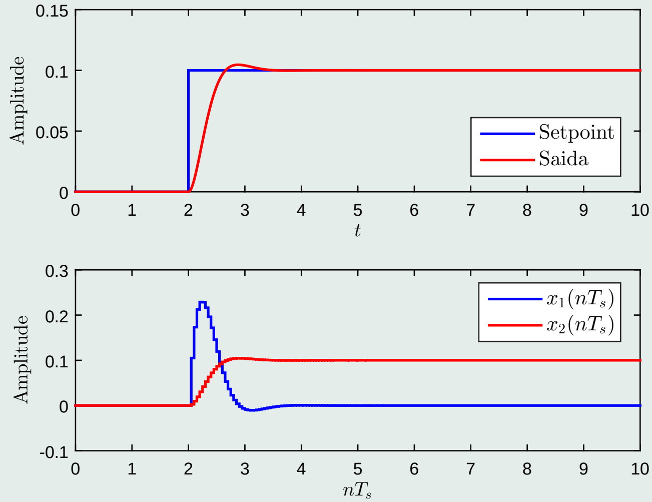
(b) Sinal de Controle



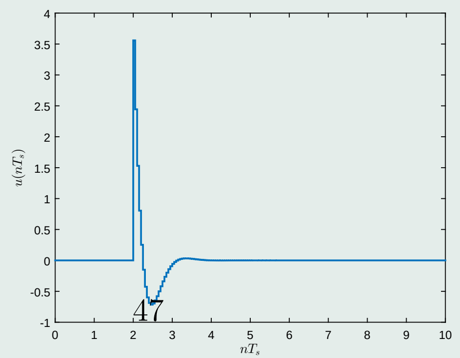
(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle

```
clear all; clc; close all;
fs=20; Ts=1/fs;
A = [-11 -10; 1 0]; B = [1; 0]; C = [0 1];
%OBS: no bloco State-Space foi feito C=eye(2) para obter na saída todos
%estados para a realimentação. Para obter y, tomou-se a 2a saída
[Phi,Gamma] =  c2d(A,B,Ts);
Phi_ = [Phi zeros(2,1); -C 1]; Gamma_ = [Gamma; 0];
wn = 5.71; zeta = 0.7;
s1 = wn*(-zeta+j*sqrt(1-zeta^2));
p_c = exp([s1; s1']*Ts); %Polos do sist. de controle em MF
p_c = [p_c; 0.2]; %O terceiro polo foi inserido em z = 0.2
K_ = place(Phi_,Gamma_,p_c); % Projeto do Controlador
K = K_(1:2); Ki = -K_(3);
sim('SIM_EX2_CHAP_09');
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2);
t_d = (0:length(x_1)-1)*Ts;
figure(5); subplot(2,1,1);plot(t,r,'b',t,y,'r');
xlabel('$t$','Interpreter','latex');
ylabel('Amplitude','Interpreter','latex')
leg = legend('Setpoint','Saida');
set(leg,'Interpreter','latex','Location','best');
subplot(2,1,2);stairs(t_d,x_1,'b');hold on; stairs(t_d,x_2,'r');
xlabel('$n T_s$','Interpreter','latex');
ylabel('Amplitude','Interpreter','latex')
leg = legend('$x_1(n T_s)$','$x_2(n T_s)$');
set(leg,'Interpreter','latex','Location','best');
figure(6); stairs(t_d, u);
```

```
xlabel('$n T_s$','Interpreter','latex');
ylabel('$u(n T_s)$','Interpreter','latex');
```

O digrama de simulação é apresentado na Figura 19. O código do bloco `Matlab Function` é apresentado a seguir:

```
function u = fcn(r, x_1, x_2, K, Ki)
%#eml
global v
y=x_2;
u = -(K(1)*x_1 + K(2)*x_2)+ Ki*v;
v = v+(r-y);
```

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 20.

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 49 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Homepage
Página de Rosto
Página 50 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

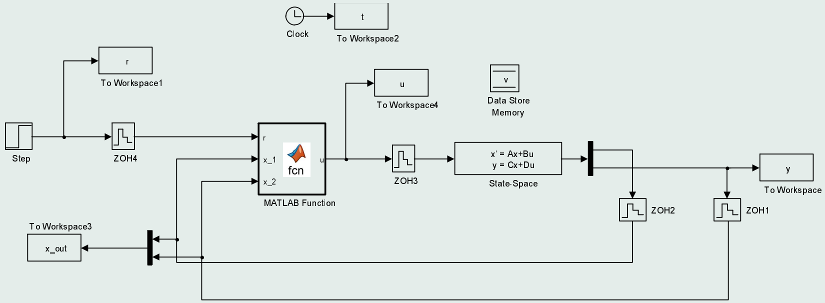
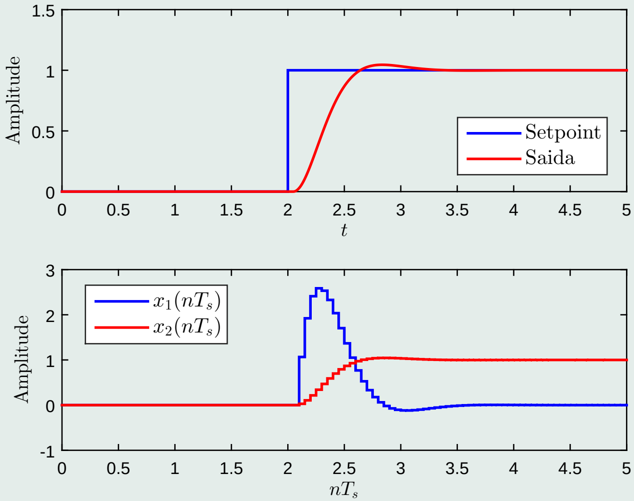
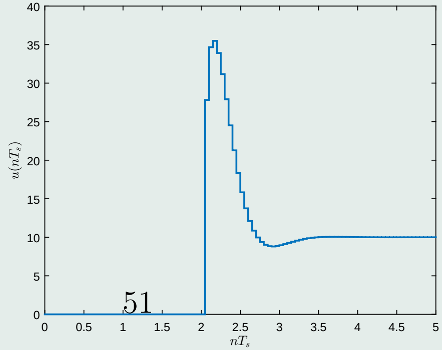


Figure 19: Diagrama de simulação do Exemplo .2.



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle

Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 51 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

7. Sistemas com perturbações

Considere o sistema da Figura 21.

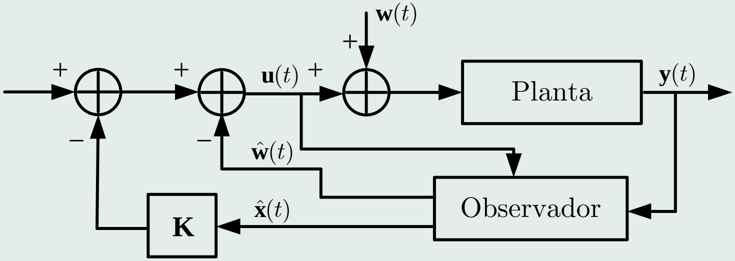


Figure 21: Sistema com cancelamento de perturbação modelada.

Suponha que o sistema é afetado por uma perturbação $\mathbf{w}(t)$, cujo modelo é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_w(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t) \tag{67}$$
$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t) \tag{68}$$

Se $\mathbf{w}(t)$ for constante, então $\mathbf{A}_w = \mathbf{C}_w = \mathbf{I}$. O sistema aumentado pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_w(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_w\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{x}_w(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}u(t) \tag{69}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{x}_w(t)\end{bmatrix} \tag{70}$$

O equivalente discreto desse sistema é dado por:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}[n+1]\\ \mathbf{x}_w[n+1]\end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}_w\begin{bmatrix}\mathbf{x}[n]\\ \mathbf{x}_w[n]\end{bmatrix} + \mathbf{\Gamma}_w u[n] \tag{71}$$

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}[n]\\ \mathbf{x}_w[n]\end{bmatrix} \tag{72}$$

O ganho de realimentação de estados $\mathbf{K}$ é obtido a partir de $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Gamma}$ não aumentados. O par $(\mathbf{\Phi}_w, \mathbf{\Gamma}_w)$ não é controlável. A intenção não é controlar $\mathbf{w}[n]$, apenas rejeitá-lo.

Pode-se projetar um observador em tempo discreto para, além de observar os estados que serão realimentados, observar a perturbação $\hat{\mathbf{w}}[n]$ e cancelá-la. Portanto, para o cálculo do ganho do estimador $\mathbf{L}$, é necessário utilizar as matrizes aumentadas $\mathbf{\Phi}_w$ e $\mathbf{\Gamma}_w$.

O diagrama de blocos em tempo discreto equivalente é apresentado na Figura 22 .

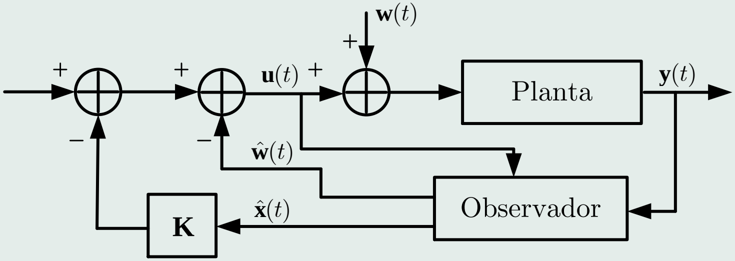


Figure 22: Sistema em tempo discreto com cancelamento de perturbação modelada.

✍ **Exemplo 3:** Considere o sistema dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+0,7)}$$

Projete um controlador digital por realimentação de estados de forma que o sistema em malha fechada apresente $w_n = 3,5$; $\zeta = 0,7$ para os polos dominantes. Considere $f_s = 10$Hz e que o sistema tenha um integrador para garantir erro nulo em regime estacionário para entrada degrau, sendo que o polo adicional em malha fechada deve ficar em $s = -2,5$. Assuma que há uma perturbação senoidal com amplitude unitária e frequência de 15 RPM. Projete um controlador por realimentação de estados, assumindo que os estados serão estimados por um observador na forma preditor, que também deve observar a perturbação para ser cancelada.

Solução: Define-se $x_1 = \dot{y}$ e $x_2 = y$. Assim, o sistema em espaço de estados é representado como:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0,7 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u; \quad y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Se $w(t) = \sin(\omega_0 t)$ é o sinal de perturbação, então $\ddot{w}(t) = -\omega_0^2 w(t)$. Portanto, a perturbação é modelada como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{w}(t)\\ \ddot{w}(t)\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_w} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_w}\underbrace{\begin{bmatrix}w(t)\\ \dot{w}(t)\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_w}$$

$$w(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}_w$$

O restante do exercício será resolvido diretamente no Matlab:

```
clear all; clc; close all;
fs=10; Ts=1/fs;
A = [-0.7 0; 1 0]; B = [1; 0]; C = [0 1]; D = 0;
[Phi,Gamma] =  c2d(A,B,Ts);
Phi_ = [Phi zeros(2,1); -C 1]; Gamma_ = [Gamma; 0]; %Sist. aumentado com Int.
```

```
%Polos do sist. de controle em MF
wn = 3.5; zeta = 0.7; s1 = wn*(-zeta+j*sqrt(1-zeta^2));
p_c = exp([s1; s1'; -2.5]*Ts); %Polos do sist. de controle em MF
wn2 = 10.0; xsi2 = 0.7; s2 = wn2*(-xsi2+j*sqrt(1-xsi2^2));
wn3 = 7.0; xsi3 = 0.99; s3 = wn3*(-xsi3+j*sqrt(1-xsi3^2));
p_o = exp([s2; s2';s3; s3']*Ts); %Polos do sist. observador completo
K = place(Phi_,Gamma_,p_c); % Projeto do Controlador
% Observador aumentado para rejeitar distúrbio
w0 = 15*2*pi/60; %RPM to rad/s
%x_aum = [x1; x2; w ; \dot w]
A_d = [0 1; -w0^2 0]; C_d = [1 0];
A_aum = [A B*C_d; zeros(2) A_d];
B_aum = [B; zeros(2,1)];
[Phi_aum,Gamma_aum] =c2d(A_aum,B_aum,Ts);
C_aum = [C , zeros(1,2)];
L = place(Phi_aum',C_aum',p_o)';
sim('SIM_EX3_CHAP_DIST_2_INT')
% Código de geração de gráficos foi omitido
```

O digrama de simulação é apresentado na Figura 23. O código do bloco `Matlab Function` é apresentado a seguir:

```
function [u, x_chap_1, x_chap_2,w_out] = fcn(r, y, K, L, Phi_aum, ...
Gamma_aum, C_aum)
%#codegen
```

```
global x_chap_ant, global w_chap, global v;
w_out = w_chap;
Ki = -K(3);
u = -K(1:2)*x_chap_ant(1:2)+Ki*v- w_chap;
v = v+(r - y);
y_chap = C_aum*x_chap_ant;
x_chap = Phi_aum*x_chap_ant+ ...
Gamma_aum*u + L*(y - y_chap);
x_chap_1 = x_chap(1); x_chap_2 = x_chap(2);
w_chap = x_chap(3);
x_chap_ant = x_chap;
```

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 24.

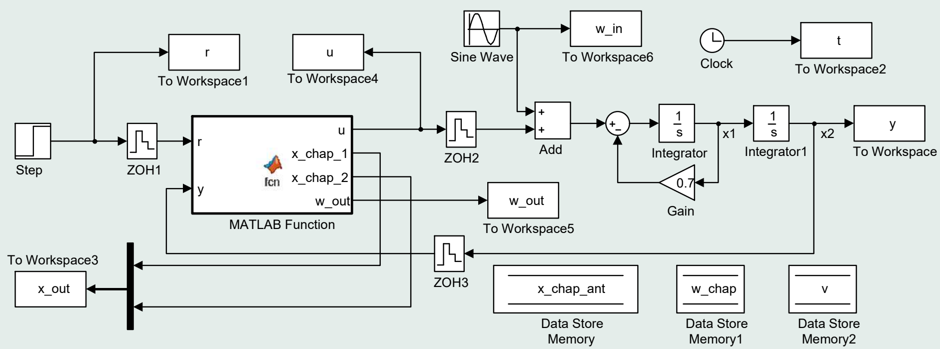
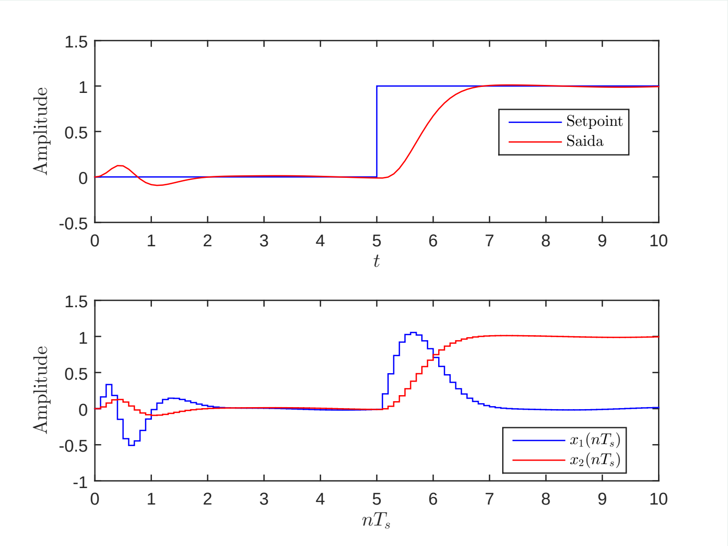
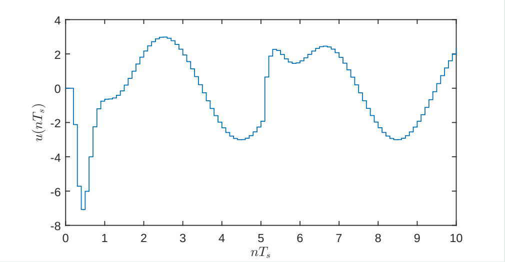


Figure 23: Diagrama de simulação do Exemplo 3.

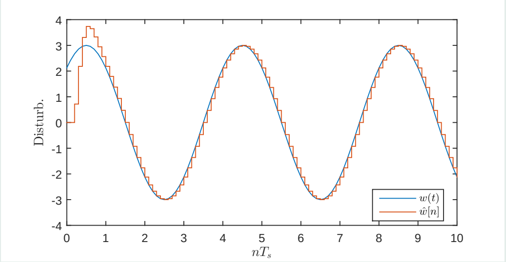
Projeto a partir de . . .
Matriz de . . .
Discretização de . . .
Controlabilidade e . . .
Princípio da Separação
Problema de . . .
Sistemas com . . .
Atrasos
Homepage
Página de Rosto
Página 59 de 63
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle



(c) Sinal de Perturbação

Figure 24: Resposta do Exemplo .3.

8. Atrasos

Dois tipos de atrasos podem ser considerados: atrasos nos sensores e atrasos nos atuadores. A ideia aqui consiste em considerar essas formas de atraso no modelo em espaço de estados e, consequentemente, na síntese de controladores. Será tratado apenas o caso SISO.

Na Figura 25 é apresentado o caso em que o sensor apresenta um atraso.

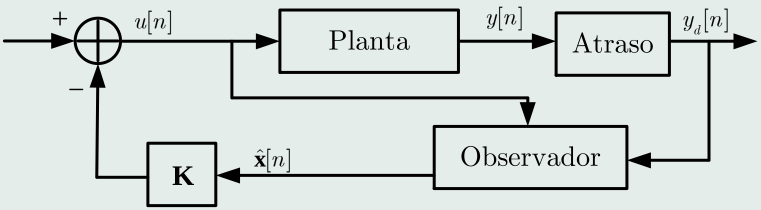


Figure 25: Sistema com atraso no sensor.

Pode-se incorporar as saídas atrasadas como estados do sistema, e calcular tanto $\mathbf{K}$ quanto $\mathbf{L}$ usando o sistema aumentado.

O modelo para um cilo de atraso é dado por $y_{1d}[n+1] = y[n]$. Para dois cilos, $y_{2d}[n+1] = y_{1d}[n]$, e assim por diante.

✍ **Exemplo 4:** Suponha que o sensor é afetado por um atraso de 3 amostras. O sistema aumentado é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ y_{1d}[n+1] \\ y_{2d}[n+1] \\ y_{3d}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ y_{1d}[n] \\ y_{2d}[n] \\ y_{3d}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y_d[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ y_{1d}[n] \\ y_{2d}[n] \\ y_{3d}[n] \end{bmatrix},$$

onde y_d é a saída atrasada por três ciclos.

No esquema da Figura 26 o atraso é considerado no elemento atuador.

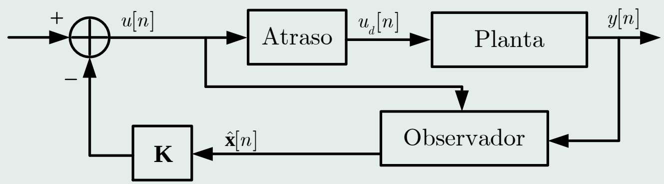


Figure 26: Sistema com atraso no atuador.

Neste caso, pode-se incorporar a entrada de controle atrasada como um estado do sistema, e calcular tanto $\mathbf{K}$ quanto $\mathbf{L}$ usando o sistema aumentado.

✍ **Exemplo 5:** Suponha que o atuador é afetado por um atraso de 3 amostras. O sistema aumentado é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ u_{1d}[n+1] \\ u_{2d}[n+1] \\ u_{3d}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ u_{1d}[n] \\ u_{2d}[n] \\ u_{3d}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ u_{1d}[n] \\ u_{2d}[n] \\ u_{3d}[n] \end{bmatrix}$$