Integração 2

30, 31 / out / 2023

Integração : continuando

Nas notas "Integração" definimos a integral de uma função limitada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_a^b s : s \leq f \right\} = \inf\left\{ \int_a^b t : t \geq f \right\}$$

assumindo que o supremo e o ínfimo são iguais e onde s e t são funções degrau. Provamos ainda que funções monótonas (e limitadas) são integráveis (em intervalos finitos). Veremos agora algumas propriedades da integral que nos permitirão expandir significativamente a classe de funções que sabemos serem integráveis.

Antes de prosseguir, definimos

- $$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

- $$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Propriedades da integral de uma função degrau

Já discutimos as seguintes propriedades da integral de funções degrau:

Linearidade: Sejam s e t funções degrau definidas em $[a,b]$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\boxed{\int_a^b (\alpha s+\beta t)(x)\,dx = \alpha \int_a^b s(x)dx + \beta \int_a^b t(x)dx}$$

(Lembre-se de que $(\alpha s+\beta t)(x) = \alpha s(x) + \beta t(x)$, por definição).

Teorema de Comparação: Se $s < t$ (isto é, se $s(x) < t(x)$ $\forall x \in [a,b]$), então

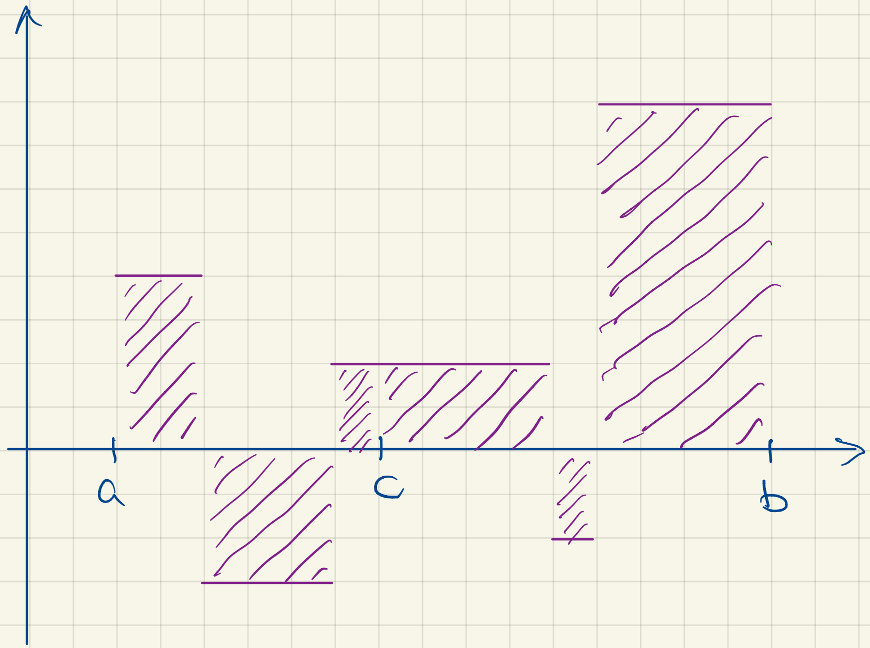
$$\boxed{\int_a^b s(x)\,dx < \int_a^b t(x)\,dx}.$$

As demonstrações de ambos os teoremas acima, bem como das propriedades que listaremos a seguir, são feitas da mesma maneira: provamos, para começar, o resultado para funções constantes, depois usamos isso para prová-lo para um par de funções degrau definidas na mesma partição do intervalo $[a,b]$ e, por fim, usamos a observação que sempre podemos supor que as partições são iguais.

A próxima propriedade é bem simples, mas muito útil:

Aditividade em relação ao intervalo de integração: Seja s uma função degrau definida em $[a,b]$ e suponha que $a < c < b$. Então

$$\boxed{\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx}$$



Aqui c pode ser qualquer ponto no intervalo $[a,b]$. A demonstração é simples, já que podemos assumir que c é um dos pontos da partição que define s.

Assumindo que $s : [0,b] \to \mathbb{R}$ e $0 < a < b$, segue dessa propriedade que

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_0^b s(x)\,dx - \int_0^a s(x)\,dx,$$

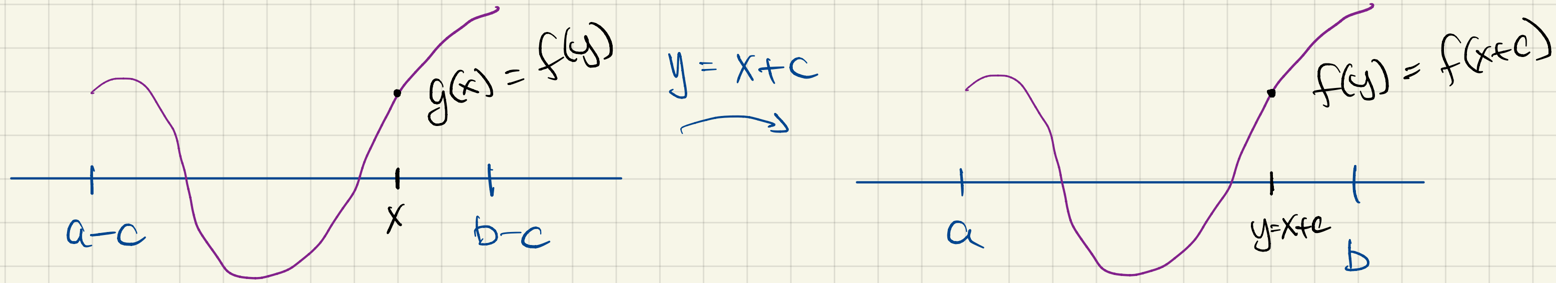
e disso segue, por exemplo, que

$$\boxed{\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1}},$$

já que provamos que $\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$.

Invariância por translação

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $c\in\mathbb{R}$, então a função $g(x)=f(x+c)$ está definida no intervalo $[a-c,b-c]$ e seu gráfico é o transladado do de f para esse intervalo:



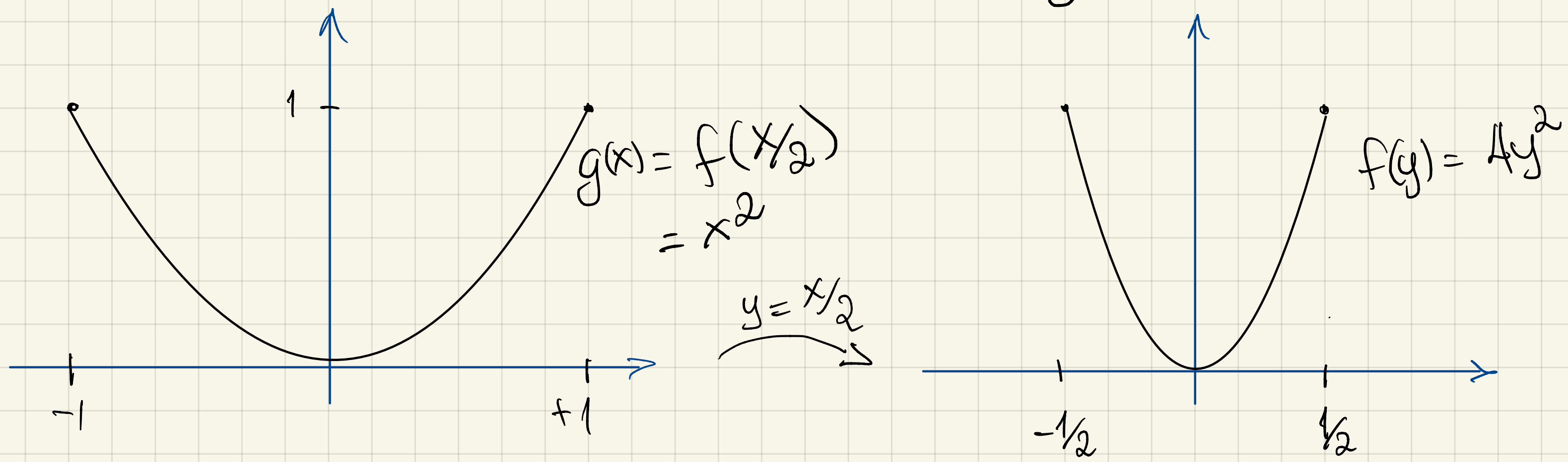
Se $s:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função degrau e $c\in\mathbb{R}$, então $t(x)=s(x+c)$ também é uma função degrau, definida em $[a-c,b-c]$ e

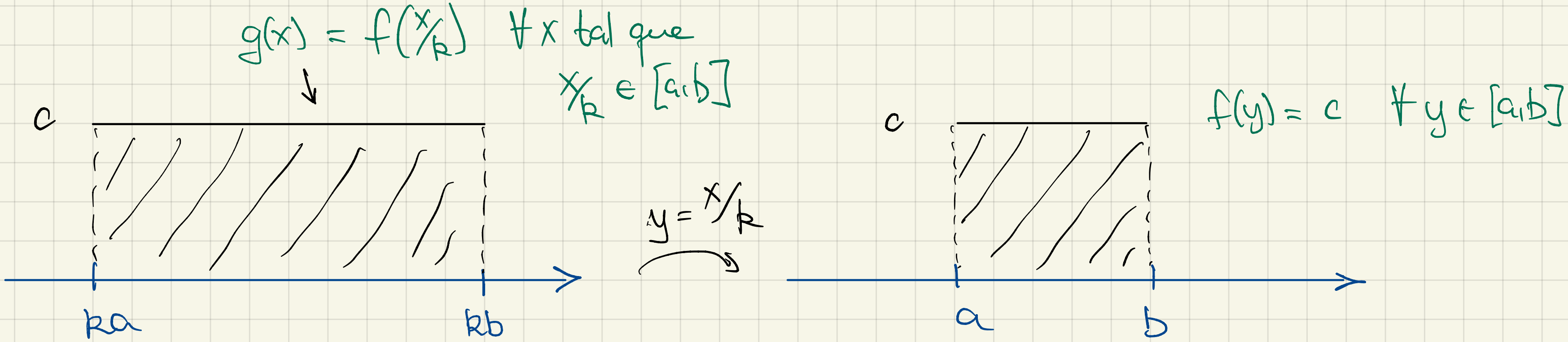
$$\boxed{\int_a^b s(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} s(x+c)\,dx} = \int_{a-c}^{b-c} t(x)\,dx$$

Como os gráficos de s e t são transladados (horizontais) um do outro, essa igualdade é bastante natural.

Expansão / contração do intervalo de integração

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $k > 0$, então a função $g(x) = f(x/k)$ está definida no intervalo $[ka, kb]$ e seu gráfico é obtido expandindo (se $k > 1$) ou contraindo (se $0 < k < 1$) o gráfico de f horizontalmente:





Portanto, temos

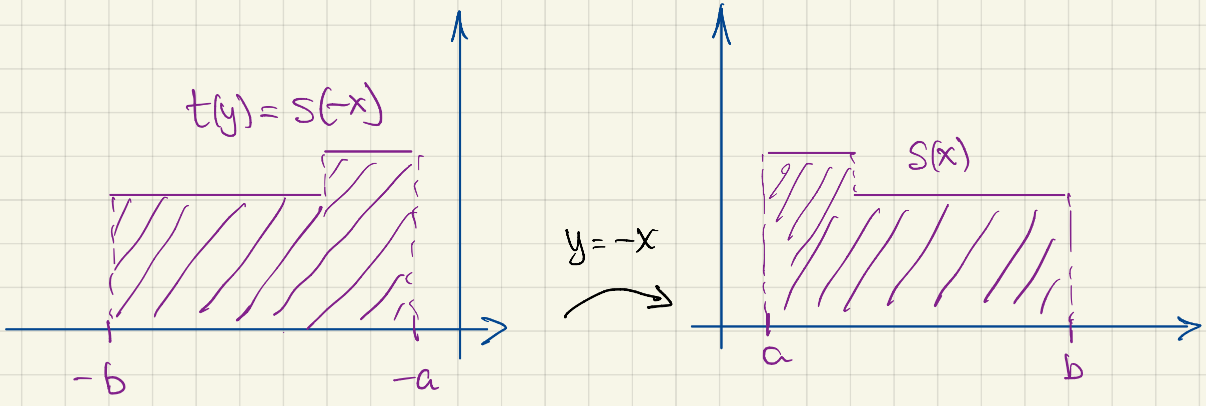
$$\boxed{\int_{ka}^{kb} f(x/k)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx}$$

que também pode ser escrita, de modo sugestivo, como

$$\boxed{\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Lembrando que definimos a integral "no sentido oposto" $\int_b^a$ como o negativo da integral $\int_a^b$, isto é, $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$, podemos estender a propriedade acima para números negativos. Em particular, para $k=-1$,

$$\boxed{\int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$



A despeito das minhas melhores intenções, a notação na última página deu o "spoiler" do que comento agora: enquanto todas essas propriedades são bastante claras para funções degrau (aliás, exatamente por serem claras para funções degrau), não é muito difícil provar que <u>elas valem igualmente para funções integráveis quaisquer</u>.

Isso nos permite generalizar a igualdade que provamos anteriormente: se $0 \leq a < b$ então

$$\boxed{\int_a^b x^p \, dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.} \quad (*)$$

Suponha agora que $-b < -a \leq 0$. Então, usando a última igualdade da página anterior, temos

$$\int_{-b}^{-a} x^p \, dx \overset{\text{Fórmula anterior}}{=} \int_a^b (-x)^p \, dx \overset{\text{Linearidade}}{=} (-1)^p \int_a^b x^p \, dx \overset{(*)}{=} (-1)^p \, \frac{\left(b^{p+1} - a^{p+1}\right)}{p+1} = \frac{(-a)^{p+1} - (-b)^{p+1}}{p+1}.$$

Isto é, a fórmula $(*)$ também vale se $a < b \leq 0$.

<u>Exercício</u>: Use as propriedades anteriores para provar que $(*)$ vale $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Agora podemos enfim integrar qualquer polinômio usando o que acabamos de fazer e linearidade:

$$\int_a^b (3x^2 - 5x + 17)\,dx = 3\int_a^b x^2\,dx - 5\int_a^b x\,dx + 17\int_a^b 1\,dx$$

$$= 3\left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) - 5\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) + 17\,(b-a).$$

Exercícios: Seção 1.26, p.83ff: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 15, 16, 18, 20, 21, 22.