Seleção de exercícios sugeridos

Preparativos para a P1 (Matemática III)

1. Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

2. Suponha que estejam definidas no conjunto $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a, b > 0\}$ as seguintes operações:

1. $(a,b) \oplus (c,d) = (ac, bd)$, para todo $(a,b), (c,d) \in V$.
2. $\alpha(a,b) = (a^\alpha, b^\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $(a,b) \in V$.

Prove que V, munido dessas operações, é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

3. Sob que condições impostas ao escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ os vetores $(0,1,\alpha)$, $(\alpha,0,1)$ e $(1+\alpha,1,\alpha)$ formam uma base de $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$?

4. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial de todas as funções do tipo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Prove que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é linearmente independente em V, onde f_1, f_2, f_3 são dadas por $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ e $f_3(x) = e^{-ix}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

5. Seja $\mathcal{B} = \{(i, 1-i, 2), (2, 1, -i), (5-2i, 4, -1-i)\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}^3$. Considere tanto $\mathbb{C}^3$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{R}$.
(a) $\mathcal{B}$ é um conjunto l.i.?
(b) Decida se $(3+i, 4, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}$.

6. Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V sobre o corpo K em questão nos seguintes casos:

(a) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $S = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x = 0\}; K = \mathbb{R}$

(b) $V = \mathbb{R}^n$ e $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \cdot a_2 = 0\}; K = \mathbb{R}$

(c) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $S = \{f \in V; f(0) = f(1)\}; K = \mathbb{R}$

7. (extra) Sejam F_1, F_2 subespaços de V. Mostre que $F_1 \cap F_2$ é um subespaço de V.

8. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V.

(a) Dê um exemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ pode não ser subespaço de V.

(b) Prove que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se e somente se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

9. (extra) Encontre o conjunto solução de $\begin{cases} 2x + y - 7z = 0 \\ \qquad\;\; y + 2z = 0 \end{cases}$.

10. Seja

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) : a_{11} + a_{12} = 0 \right\}.$$

(a) Mostre que W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Determine uma base de W.

(c) Seja $W_1 = \{(a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) : a_{21} = -\overline{a_{12}}\}$. Prove que W_1 é um subespaço de V sobre $\mathbb{R}$ e ache uma base de W_1.