PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 25 DE OUTUBRO

LISTA 4

19) Suponha que $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ seja um subconjunto LI de um espaço vetorial V. Mostre que $[u_1, \ldots, u_r] \cap [v_1, \ldots, v_s] = \{0_V\}$.

RESOLUÇÃO.

Seja $w \in [u_1, \ldots, u_r] \cap [v_1, \ldots, v_s]$. Como $w \in [u_1, \ldots, u_r]$, podemos fixar $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ de modo que $w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r$. Por sua vez, como $w \in [v_1, \ldots, v_s]$, podemos, também, fixar $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{R}$ de modo que $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s$. Feito isso, notemos que, como

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s,$$

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + (-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_s) v_s = 0.$$

Logo, resulta da hipótese de que $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ é LI que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = -\beta_1 = \cdots = -\beta_s = 0$$

— a partir do que concluímos que $w = 0u_1 + \cdots + 0u_r = 0_V$. E, como $0_V \in [u_1, \ldots, u_r] \cap [v_1, \ldots, v_s]$, e w em $[u_1, \ldots, u_r] \cap [v_1, \ldots, v_s]$ é arbitrário, disso decorre que $[u_1, \ldots, u_r] \cap [v_1, \ldots, v_s] = \{0_V\}$.

20) Mostre que, se $S := \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um subconjunto LI de um espaço vetorial V, então $T := \{v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1\}$ também é LI. Vale a recíproca?

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_2 - v_1) + \cdots + \alpha_n (v_n - v_1) = 0_V.$$

Como

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_2 - v_1) + \cdots + \alpha_n (v_n - v_1) = (\alpha_1 - \cdots - \alpha_n) v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

decorre da hipótese de que S é LI que

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

— a partir do que concluímos que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. E, como $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_2 - v_1) + \dots + \alpha_n(v_n - v_1) = 0_V$ são arbitrários, disso resulta, por fim, que T é LI.

RESPOSTA DA PERGUNTA: sim, vale a recíproca.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n = 0_V$$

Como

$$0_V = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) v_1 + \beta_2(v_2 - v_1) + \dots + \beta_n(v_n - v_1),$$

resulta da hipótese de que T é LI que

$$\begin{cases} \beta_1 + \dots + \beta_n = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \beta_n = 0 \end{cases}$$

— O que, por sua vez, permite-nos concluir que $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$. E, como $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = 0_V$ são arbitrários, disso decorre que S é LI.