PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 18 DE OUTUBRO

DEFINIÇÃO.

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W um subespaço de V. Nessas condições, dizemos que S é um conjunto gerador de W (ou que S gera W) se $[S] = W$.

PROPOSIÇÃO.

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e se W é um subespaço de V, então $[W] = W$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W um subespaço de V. É claro que $W \subseteq [W]$ (pois $S \subseteq [S]$ qualquer que seja $S \subseteq V$). Em vista disso, para concluirmos que $[W] = W$, basta mostrarmos que $[W] \subseteq W$. Para tanto, fixemos, inicialmente, $v \in [W]$ de modo arbitrário. Como $v \in [W]$, existem $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $w_1, \ldots, w_n \in W$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n$. Sendo assim, como, para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$, quaisquer $w_1, \ldots, w_n \in W$ e quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n \in W$ (pois W é subespaço de V), podemos concluir que $v \in W$. E, como v em $[W]$ é completamente arbitrário, disso resulta, por fim, que, de fato, $[W] \subseteq W$. Logo, $[W] = W$.

COROLÁRIO.

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e se $S \subseteq V$, então $[[S]] = [S]$.

DEMONSTRAÇÃO.

Com efeito, nesse caso, decorre da proposição anterior e do fato de que $[S]$ é um subespaço vetorial de V que $[[S]] = [S]$.