MAP2313 - Tópicos de Matemática Aplicada

1º Semestre de 2013 - Lista 2

Parte I - Equação da Onda

Exercício 1 Determine o deslocamento $u(x,t)$ da corda vibrante mantida fixa nas extremidades e posta em movimento com velocidade nula a partir da posição inicial

$$f(x) = \begin{cases} bx & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}L \quad \text{(b é uma constante)} \\ \frac{1}{4}bL & \frac{1}{4}L \leq x \leq \frac{3}{4}L \\ b(L-x) & \frac{3}{4}L \leq x \leq L \end{cases}$$

Exercício 2 *Vibrações amortecidas.* Suponha que a corda vibrante esteja imersa em um fluido (o ar, por exemplo), o qual opõe uma resistência ao movimento proporcional à velocidade. A equação para o deslocamento $u(x,t)$ se torna

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - ku_t \quad (k \text{ é uma constante positiva}).$$

a) Obtenha a solução geral da equação acima sujeita às condições $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$.

b) Usando a série obtida em a), discuta por que a vibração de uma corda elástica com extremidades fixas tende a desaparecer devido à resistência do ar.

c) Explique por que é razoável desprezar a resistência do ar em um pequeno intervalo de tempo após $t = 0$.

Exercício 3 Resolva

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty$$

com as condições iniciais $u(x,0) = e^x$ e $u_t(x,0) = \operatorname{sen} x$.

Parte II - Transformada de Fourier

Nos exercícios abaixo, a transformada de Fourier e a sua inversa são definidas por

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu x} f(x)\, dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu x} \hat{f}(\nu)\, d\nu$$

Exercício 4 Calcule a transformada de Fourier de f onde

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 0.5 \\ 0 & \text{se } |x| > 0.5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = e^{-2\pi|x|}$ (integre duas vêzes por partes e veja o que acontece)

Exercício 5 Se a transformada de $f(x)$ é $\hat{f}(\nu)$, mostre formalmente que

a) para c real, a transformada de $f(x-c)$ é $\hat{f}(\nu)e^{-i2\pi c\nu}$;

b) para $c>0$, a transformada de $f(cx)$ é $\frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\nu}{c}\right)$;

c) para c real, a transformada de $f(x)e^{i2\pi cx}$ é $\hat{f}(\nu-c)$;

d) a transformada de $xf(x)$ é $\frac{i}{2\pi}\hat{f}'(\nu)$;

e) a transformada de $f'(x)$ é $i2\pi\nu\hat{f}(\nu)$.

Exercício 6 Seja f definida por $f(x)=e^{-\pi x^2}$. Mostre que $\hat{f}'(\nu)=-2\pi\nu\hat{f}(\nu)$. Sabendo-se que $\hat{f}(0)=1$, conclua que $\hat{f}(\nu)=e^{-\pi\nu^2}$.

Exercício 7 Considere o problema de valor inicial para a equação do calor

$$u_t=u_{xx},\ -\infty<x<\infty,\ t>0,\quad u(x,0)=f(x).$$

Usando a transformada de Fourier e suas propriedades, obtenha a expressão

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)\,dy$$

para uma solução do problema, onde

$$K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$$

é conhecido como o núcleo da equação do calor.

Parte III - Transformada de Fourier Discreta

Exercício 8 Dados N números complexos $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$, a transformada de Fourier discreta desta seqüência é definida por

$$F_k=\sum_{j=0}^{N-1}f_je^{-i2\pi jk/N},\quad 0\le k\le N-1.$$

Prove que se $\{F_k\}_{k=0}^{N-1}$ é a transformada de Fourier discreta de $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$, então

a) $f_j=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F_ke^{i2\pi jk/N}$ (transformada inversa).

b) $\sum_{j=0}^{N-1}|f_j|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|F_k|^2$.

Exercício 9 Calcule a transformada de Fourier discreta das seqüências

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0;\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1;\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1;\\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.
\end{array}$$