4302112 - Física II para o IFUSP-2023

1ª Avaliação (100 minutos)

NOME: Gabarito - Márcia Número USP:__________ Turma:__

1) Uma partícula de **400 g** está presa a uma mola de constante **k = 0,5 N/m** e pode oscilar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito. Se a massa for deslocada de **5 cm** da sua posição de equilíbrio determine:
a) o período do seu movimento (0,5),
b) a máxima velocidade da partícula (0,5),
c) a máxima aceleração da partícula (0,5),
d) expresse o deslocamento, a velocidade e a aceleração da partícula como função do tempo, (3,0)
e) qual é a energia total do sistema? (0,5)

2) Uma mola de massa desprezível e constante elástica **150 N/m** está pendurada na posição vertical. A essa mola está preso um corpo de massa **6 kg**, que é colocado sobre um suporte móvel, de tal forma que a mola fique com seu comprimento natural. Tomando como origem do tempo e do deslocamento vertical do corpo o momento e a posição nos quais o suporte é removido, determine:
a) a segunda Lei de Newton para o movimento do corpo (1,0),
b) a posição do corpo como função do tempo (2,0),
c) a equação de conservação de energia mecânica do sistema e a partir dessa determine a elongação máxima da mola (2,0).

Assuma a aceleração da gravidade g = 10 m/s².

(1) $m = 400g$ e $k = 0{,}5\ N/m \Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}5}{0{,}4}} = \sqrt{1{,}25} = 1{,}118\ rad/s$

(a) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}118} \Rightarrow \boxed{T = 5{,}62\ s}$

(b) $x(t) = 0{,}05 \cos(1{,}118t)$

$v(t) = -0{,}0559\ \text{sen}(1{,}118t) \Rightarrow \boxed{v_{máx} = 0{,}0559\ m/s}$

(c) $a(t) = -0{,}0625 \cos(1{,}118t) \Rightarrow \boxed{a_{max} = 0{,}0625\ m/s^2}$

(d) $x(t) = 0{,}05 \cos(1{,}118t)$

$v(t) = -0{,}0559\ \text{sen}(1{,}118t)$

$a(t) = -0{,}0625 \cos(1{,}118t)$

(e) $E = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times (0{,}05)^2 = 0{,}000625\ J \Rightarrow \boxed{E = 625\ \mu J}$

(2) (a) $m\ddot{x} = -kx + mg$

(b) $m\ddot{x} + k\left(x - \frac{mg}{k}\right) = 0$ substituindo $y = x - \frac{mg}{k}$ $\begin{cases} \dot{x} = \dot{y} \\ \ddot{x} = \ddot{y} \end{cases}$

$m\ddot{y} + ky = 0 \Rightarrow y = A\cos(\omega t + \varphi)$

$x = A\cos(\omega t + \varphi) + mg/k$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{150}{6}} = 5\ rad/s$

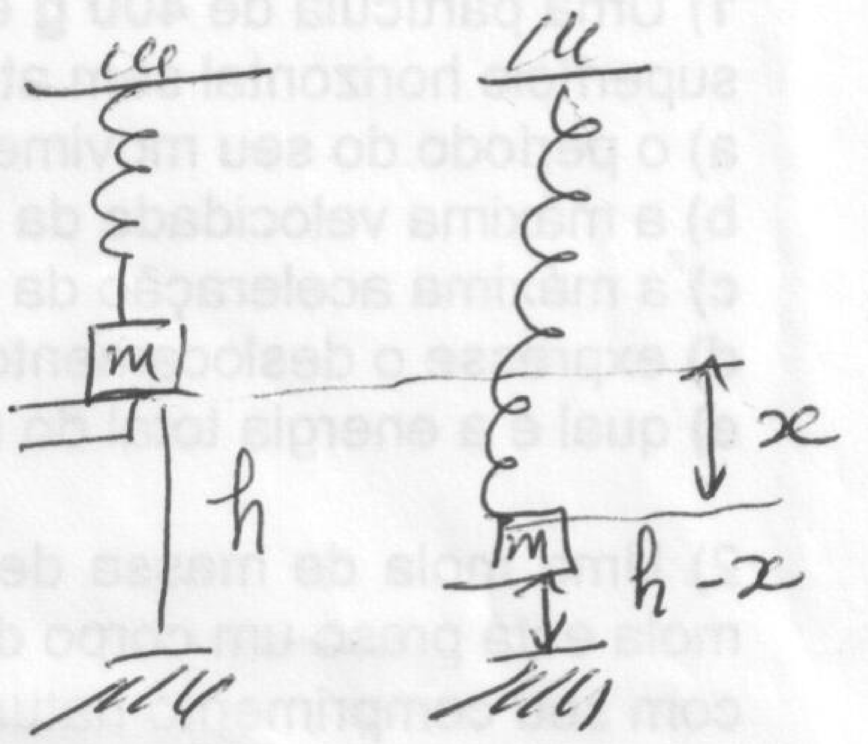
$x(t) = A\cos(5t+\varphi) + \frac{mg}{k}$

$x(0)=0 \Rightarrow A\cos\varphi = -\frac{mg}{k}$, como $A>0 \Rightarrow \varphi=\pi$ com $A = \frac{6}{15}$

ou $A = \frac{2}{5}$

$$\boxed{x(t) = 0{,}4\cos(5t+\pi) + 0{,}4}$$

(c) $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h-x)$



(1) $\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = 0$ com

$x(t) = 0{,}4\cos(5t+\pi) + 0{,}4$ pode deixar como função de A.

$v(t) = -2\,\text{sen}(5t+\pi)$

$m = 6\ kg$

$k = 150\ N/m$

Em (1) $\Rightarrow \frac{6}{2}\times\left[4\,\text{sen}^2(5t+\pi)\right] + \frac{150}{2}\times(0{,}4)^2\left[\cos(5t+\pi)+1\right]^2 -$

$- 6\times 10\times\left[0{,}4\cos(5t+\pi)+0{,}4\right]$

$12\,\text{sen}^2(5t+\pi) + 12\left[\cos^2(5t+\pi) + 2\cos(5t+\pi) + 1\right] -$

$- 24\cos(5t+\pi) - 24 = 0$

$12\left[\text{sen}^2(5t+\pi) + \cos^2(5t+\pi)\right] + \cancel{24\cos(5t+\pi)} + 12 -$

$- \cancel{24\cos(5t+\pi)} - 24 = 0$

$12 + 12 - 24 = 0 \Rightarrow$ como provado!

neste caso, $x(t)_{max}$ quando $\cos(5t+\pi) = 1$

$$\boxed{x_{max} = 0{,}8\ m}$$

4302112 - Física II para o IFUSP-2023

2ª Avaliação (100 minutos)

NOME: Gabarito - Márcia Número USP:__________ Turma:__

1) Um sólido possui massa **m = 16 kg** e está se movendo sob a ação de uma força elástica com constante de mola **k = 25 N/m** de uma força de atrito viscoso da forma $-\rho\frac{dx}{dt}$. As condições iniciais do movimento são: deslocamento da mola **x(0) = 1 cm** e velocidade inicial **v(0) = 0 cm/s.** Determine para:

a) ρ_1 = 8 Ns/m o tipo de amortecimento (1,0),
b) ρ_1 = 8 Ns/m a elongação da mola em função do tempo (1,0),
c) ρ_2 = 40 Ns/m o tipo de amortecimento (1,0),
d) ρ_2 = 40 Ns/m a elongação da mola em função do tempo (1,0),
e) ρ_3 = 48 Ns/m o tipo de amortecimento (0,5),
f) ρ_3 = 48 Ns/m a elongação da mola em função do tempo (0,5).

2) Uma mola de massa desprezível e constante elástica **50 N/m** está pendurada na posição vertical. A essa mola está preso um corpo de massa **2 kg**, que é colocado sobre um suporte móvel, de tal forma que a mola fique com seu comprimento natural. Todo o sistema é mergulhado numa cuba contendo um líquido viscoso, passando a oscilar com uma amplitude cada vez menor. Esse mergulho ocorre no movimento descendente do corpo, no instante em que a força resultante sobre ele é nula, (**t = 3T₀/2**, onde T_o é o período de oscilação do corpo em MHS).
Após um intervalo de tempo t = T, onde T é o novo período de oscilação do corpo em MHA, a energia do sistema se reduz a **5%** do valor da energia mecânica inicial. Neste caso, determine:

a) a viscosidade (ρ) do líquido (2,0),
b) a segunda Lei de Newton para o movimento do corpo (1,0),
c) a posição do corpo como função do tempo dentro do líquido (2,0).

Assuma a aceleração da gravidade g = 10 m/s².

(1) $m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{5^2}{4^2}} = \frac{5}{4} = 1{,}25\,\text{rad/s}$

(a)

$x(t) = X_0 \cos(w_0 t + \varphi)$

$x(0) = 1 = x_0 \cos\varphi$ com $x_0 = A$

$\dot{x}(t) = -A w_0 \,\text{sen}(w_0 t + \varphi)$

$\dot{x}(0) = v_0 = -A w_0 \,\text{sen}\,\varphi = 0$; como $v(0) = v_0 = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\therefore A = x_0 = 1\,\text{cm}$

$x(t) = 1\cos(1{,}25t)\ [\text{cm}] \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\rho_1}{m} = \frac{8}{16} = 0{,}5$

$\frac{\gamma_1}{2} = 0{,}25\, s^{-1}$

$w_0 > \frac{\gamma_1}{2}$

amortecimento sub-crítico

(b) $w_1 = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16} - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cong 1{,}22\,\text{rad/s}$

$\therefore\ x_1(t) = A_1 e^{-\gamma_1/2\, t} \cos(w_1 t + \varphi_1) = A_1 e^{-0,25t} \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t + \varphi_1\right) \overset{t=0}{\Rightarrow}$

$1 = A_1 \cos\varphi_1$

$\dot{x}_1(t) = -0,25\, A_1 e^{-0,25t} \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t + \varphi_1\right) - A_1 e^{-0,25t}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t + \varphi_1\right)$

$\dot{x}_1(0) = 0 = -0,25 \cos\varphi_1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{sen}\varphi_1 \Rightarrow -\frac{1}{4}\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\operatorname{sen}\varphi_1$

$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\cos\varphi_1} = \frac{-2}{4\sqrt{6}} = \frac{-2\sqrt{6}}{4\cdot 6} = -\frac{\sqrt{6}}{12} \Rightarrow \varphi_1 = -11,5^\circ$

$\varphi_1 = -0,2\ \text{rad}$

$\cos\varphi = 0,98$

$A_1 = \frac{1}{\cos\varphi_1} = \frac{1}{0,98} = 1,02 \Rightarrow$

$$\boxed{x_1(t) = 1,02\, e^{-0,25t} \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t - 0,2\right) [\text{cm}]}$$

(c) $\rho_2 = 40\ \text{Ns/m} \Rightarrow \gamma_2 = \frac{\rho_2}{m} = \frac{40}{16} = \frac{10}{4} = 2,5 \Rightarrow \frac{\gamma_2}{2} = 1,25\ s^{-1}$

Como $w_0 = 1,25\ \text{rad/s} \Rightarrow w_0 = \frac{\gamma_2}{2} \Rightarrow$ amortecimento crítico

(d) $x_2(t) = (at+b)\, e^{-\gamma_2 t/2} = (at+b)\, e^{-1,25t}$

$x_2(0) = 1 = b \Rightarrow b = 1\ \text{cm}$ e $\dot{x}_2(0) = a e^{-1,25t} + (at+b) e^{-1,25t}(-1,25)$

$\dot{x}_2(0) = 0 = a - 1,25 b \Rightarrow a = 1,25 b \Rightarrow a = 1,25\ \text{cm}$

$$\boxed{x_2(t) = (1,25t + 1)\, e^{-1,25t}\ [\text{cm}]}$$

(e) $\rho_3 = 48\ \text{Ns/m} \Rightarrow \gamma_3 = \frac{48}{16} = 3\ s^{-1} \Rightarrow \frac{\gamma_3}{2} = 1,5\ s^{-1}$

$\frac{\gamma_3}{2} > w_0$ pois $w_0 = 1,25\ \text{rad/s} \Rightarrow$ amortecimento supercrítico

$x_3(t) = e^{-\frac{\gamma_3}{2}t}\left(a e^{\beta t} + b e^{-\beta t}\right)$ onde $\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma_3}{2}\right)^2 - w_0^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2}$

$\beta = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{36-25}{16}} = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4} \approx 0,83\ s^{-1}$

$x_3(t) = e^{-1,5t}\left[a e^{(\sqrt{11}/4)t} + b e^{-(\sqrt{11}/4)t}\right] \Rightarrow \dot{x}_3(t) = -1,5 e^{-1,5t}\left(a e^{\frac{\sqrt{11}}{4}t} + b e^{-\frac{\sqrt{11}}{4}t}\right) +$

$+ e^{-1,5t}\frac{\sqrt{11}}{4}\left(a e^{\frac{\sqrt{11}}{4}t} - b e^{-\frac{\sqrt{11}}{4}t}\right) \Rightarrow \dot{x}(3) = 0 = -1,5(a+b) + \frac{\sqrt{11}}{4}(a-b) \Rightarrow$

Com $x(0) = 1 \Rightarrow 1 = (a+b) \Rightarrow +1,5 = \frac{\sqrt{11}}{4}(a-b) \Rightarrow a - b = \frac{6}{\sqrt{11}}$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a-b=\dfrac{6}{\sqrt{11}} \end{array}\right\} \quad 2a = 1+\frac{6}{\sqrt{11}} \Rightarrow a = 0,5+\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$b = 1 - 0,5 - \frac{3}{\sqrt{11}} = -0,5 - \frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$\therefore \boxed{x_3(t) = e^{-1,5t}\left[\left(0,5+\frac{3}{\sqrt{11}}\right)e^{\frac{\sqrt{11}}{4}t} - \left(0,5+\frac{3}{\sqrt{11}}\right)e^{-\frac{\sqrt{11}}{4}t}\right]}$$

2 (a)

$$\left.\begin{array}{l} E(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} \\ E_{max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \end{array}\right\} \quad \frac{1}{2} m A \omega_0^2 e^{-\gamma T} = \frac{5}{100}\left(\cancel{\frac{mA^2\omega_0^2}{2}}\right)$$

$$e^{-\gamma T} = \frac{5}{100} \Rightarrow -\gamma T = \ln\frac{5}{100} \Rightarrow \frac{-\gamma \times 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \ln\frac{5}{100}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5\ rad/s \Rightarrow \frac{-\gamma . 2\pi}{\sqrt{25 - \frac{\gamma^2}{4}}} = -3$$

$$\gamma^2 (2\pi)^2 = \left(25 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \cdot 9 \Rightarrow 39,5\gamma^2 = 9\left(25 - \frac{\gamma^2}{4}\right)$$

$$\left(39.5 + \frac{9}{4}\right)\gamma^2 = 9 \times 25 = 225 \Rightarrow 41,73\gamma^2 = 225 \Rightarrow \gamma^2 = 5,39$$

$$\gamma = 2,32\ s^{-1} \text{ e } \frac{\gamma}{2} = 1,16\ s^{-1} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{m} \Rightarrow \rho = m\gamma \Rightarrow \rho = 2 \times 2,32$$

$$\boxed{\rho = 4,64\ kg/s}$$ Como $\omega_0 > \frac{\gamma}{2} \Rightarrow$ amortecimento sub-crítico

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = 4,86$$

(b)

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x} + mg$$

$$2\ddot{x} = -50x - 4,64\dot{x} + 20 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2,32\dot{x} + 25x - 10 = 0}$$

(c) No MHS $kx = mg \Rightarrow \Rightarrow x = \frac{mg}{k} \Rightarrow \frac{mg}{k} = A\cos(5t+\varphi) + \frac{mg}{k}$

$$A\cos(5t+\varphi) = 0 \Rightarrow \cos(5t+\varphi) = 0$$

$$A \neq 0 \Rightarrow 5 \times \frac{3T_0}{2} + \varphi = n\frac{\pi}{2} \quad \text{com } T_0 = \frac{2\pi}{5}$$

$$\frac{5\times 3}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}\pi}{5} + \varphi = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow 3\pi + \varphi = n\frac{\pi}{2} \xrightarrow{n = \text{mínimo}} \varphi = -\pi/2$$

Se não houvesse o meio viscoso $A = \frac{mg}{k}$ pois $x(0) = 0$

$$\therefore x(t) = \frac{mg}{k} e^{-1,16t} \cos\left(4,86t - \pi/2\right) + \frac{mg}{k}$$

4302112 - Física II para o IFUSP-2023

3ª Avaliação (100 minutos)

NOME: Gabarito - Márcia Número USP:_______________ Turma:__

1) Um corpo de massa **100 g** está preso a uma mola e oscila livremente com uma frequência angular de **40 rad/s**. Este oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é **ρ = 0,50 kg/s**.
Nestas condições, o oscilador é mantido em regime estacionário devido a uma força externa **F(t) = F$_o$ cos(ωt)**, onde **F$_o$ = 0,50 N** e **ω = 40 rad/s**. Para esta última condição:
a) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento explicitando os valores numéricos dos coeficientes γ, ω_o e F_o/m presentes na equação, indicando também suas respectivas dimensões (unidades), (2,0)
b) Escreva x(t) que representa a posição do centro de massa do corpo para o regime estacionário. (2,0)
c) Em que instante a elongação é máxima (em módulo)? (2,0)

Se subitamente a força externa é desligada num instante em que a elongação é máxima, para a nova situação:
d) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes e suas respectivas dimensões. (2,0)
e) Escreva x(t) que representa a posição do centro de massa do corpo para o novo regime amortecido. (2,0).

(a) $m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$

$\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{0,5}{0,1} = 5\,s^{-1}$; $\omega_0 = 40\,rad/s$ e $\frac{F_0}{m} = \frac{0,5}{0,1} = 5\,m/s^2$

(b) solução da equação diferencial: homogênea + particular

$x(t) = A(\omega)\cos[\omega t + \delta(\omega)]$

$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2) + \gamma^2\omega^2}}$ e $\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$

Como $\omega = \omega_0 \Rightarrow A(\omega) = \frac{F_0}{m\gamma\omega} = \frac{0,5}{0,1\times5\times40} = 0,025\,m$

Para $\omega \to \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x(t) = 0,025\cos\left(40t - \frac{\pi}{2}\right) = 0,025\,\text{sen}\,40t$

(c) $\text{sen}(\omega t) = \pm 1$

$\omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ com $n = 0,1,2,\ldots$ $n=0 \Rightarrow 40t = \frac{\pi}{2}$

$t = \frac{\pi}{80}\,s \Rightarrow t = \frac{\pi}{80} + 2n\pi$ ($n = 1,2,3,\ldots$

(d) $F_0 = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 5\dot{x} + 1600x = 0$

$\omega_0 = 40\,rad/s$ e $\frac{\gamma}{2} = 2,5\,s^{-1} \Rightarrow \omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ (sub-crítico)

e) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = \sqrt{(40)^2 - (2,5)^2} \approx \sqrt{1594}\,rad/s \Rightarrow \omega = 39,9\,rad/s$

A elongação máxima é $A = 0,025\,m$ e $x(0) = 0,025\,m$

A velocidade $v(0) \neq 0$ (hipótese) e $\cos\varphi \underset{?}{=} 0 \Rightarrow \varphi = ?$

$$v(t) = -\frac{\gamma}{2} A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) - A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Para $\varphi = 0 \Rightarrow v(t) = -2{,}5 \times 0{,}025\, e^{-2{,}5t} \cos(\sqrt{1594}\, t) +$ $\;\underset{39{,}9}{}$

$$+ (-0{,}025)\, e^{-2{,}5t} \times 39{,}9 \,\mathrm{sen}(39{,}9t)$$

$$v(0) = -1{,}06 \text{ m/s (errado!)}$$

Quando a elongação é máxima $v(t) = 0 \Rightarrow$ Supor $t = 0$ nesse instante:

$$0 = -\frac{\gamma}{2}\cos\varphi - \omega\,\mathrm{sen}\,\varphi \Rightarrow \omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = -\frac{\gamma}{2}\cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\gamma}{2\omega} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\gamma}{2\omega} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{5}{2 \times 39{,}9}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi \cong -0{,}0626 \qquad \varphi = -3{,}58^\circ \Rightarrow \varphi = -0{,}625 \text{ rad}$$

$$\therefore \boxed{x(t) = 0{,}025\, e^{-2{,}5t} \cos(39{,}9t - 0{,}125)}$$