

CAPÍTULO 12
ELEMENTOS DE MECÂNICA ANALÍTICA

1. O Princípio de d'Alembert

Esse princípio fundamental da Mecânica apoia-se sobre dois ‘pilares’: o *ponto de vista de d'Alembert* e o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Relembrando o *ponto de vista de d'Alembert*, frisamos que, enquanto a 2ª Lei de Newton é baseada nas observações de um observador ligado a um referencial inercial (Fig. 1-a), d'Alembert interpreta essa mesma lei considerando um referencial não-inercial ligado à partícula e um observador ligado a esse mesmo referencial não-inercial (Fig. 1-b).

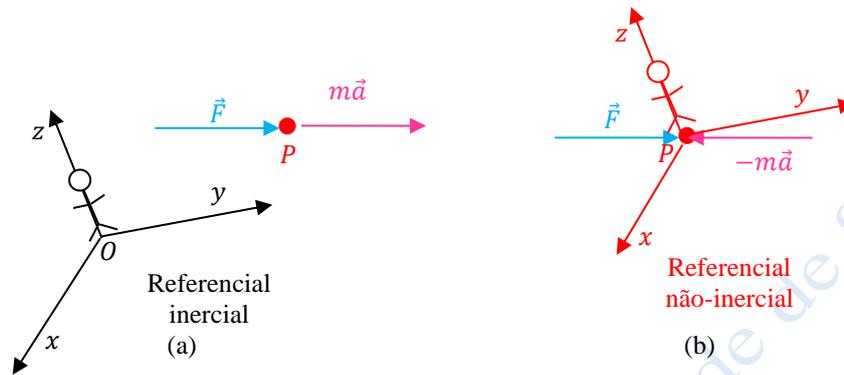


Figura 1. Pontos de vista de: (a) Newton; (b) d'Alembert.

Portanto, do ponto de vista de d'Alembert, a partícula está em equilíbrio sob a ação da força ativa \vec{F} e da força de inércia (força fictícia) $-m\vec{a}$, ou seja:

$$\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0} \quad (1 - 1)$$

E assim, o problema original de Dinâmica é transformado em um problema de Estática, ao qual se pode aplicar tanto o Princípio dos Trabalhos Virtuais quanto o Princípio das Potências Virtuais. Logo, para uma partícula em equilíbrio dinâmico (ponto de vista de d'Alembert), tem-se:

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{r} - m\vec{a} \cdot \delta\vec{r} = 0, \quad \forall \delta\vec{r} \quad (1 - 2)$$

ou, alternativamente,

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{v} - m\vec{a} \cdot \delta\vec{v} = 0, \quad \forall \delta\vec{v} \quad (1 - 3)$$

As equações 1-2 e 1-3 correspondem à aplicação do Princípio de d'Alembert a uma partícula sujeita à ação de uma força \vec{F} arbitrária. No entanto, esse princípio pode ser estendido de forma imediata a um sistema de partículas materiais sujeitas a um sistema de forças de resultantes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (Fig. 2).

Assim, para um sistema de m partículas, tem-se:

$$\sum_{i=1}^m \vec{F}_i \cdot \delta\vec{P}_i - \sum_{i=1}^m m_i \vec{a}_i \cdot \delta\vec{P}_i = 0 \quad (1 - 4)$$

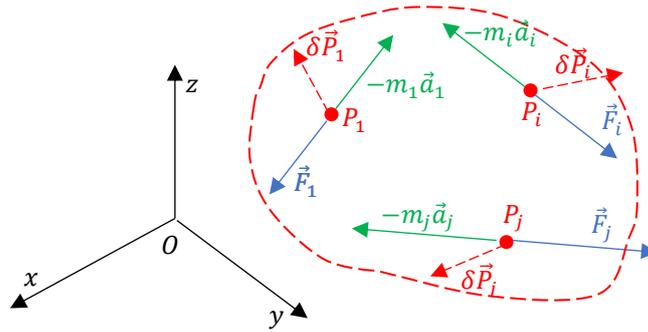


Figura 2. Sistema de partículas sujeitas a forças.

A adoção de deslocamentos compatíveis com os vínculos implica que:

$$\delta \vec{P}_i = \left. \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_1} \right|_{\vec{q}=\vec{0}} \cdot \delta q_1 + \left. \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_2} \right|_{\vec{q}=\vec{0}} \cdot \delta q_2 + \dots + \left. \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_n} \right|_{\vec{q}=\vec{0}} \cdot \delta q_n \tag{1 - 5}$$

Mostraremos ao longo dos próximos tópicos que o Princípio de d'Alembert permite determinar as equações do movimento do sistema de partículas.

2. Princípio de d'Alembert aplicado ao movimento de uma partícula livre

Consideremos uma partícula livre que se move no espaço sujeita à ação de um sistema de forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (Fig. 3).

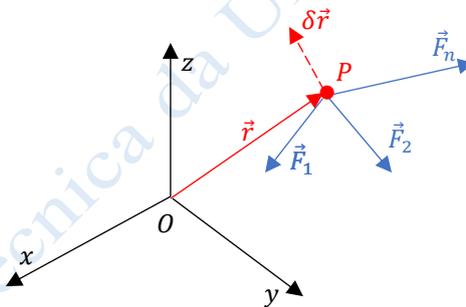


Figura 3. Partícula livre sujeita a forças.

Designando-se por \vec{F} à resultante do sistema de forças \vec{F}_i , e adotando-se um deslocamento virtual arbitrário $\delta \vec{r}$, o Princípio de d'Alembert fornece:

$$\left(\vec{F} - m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} \right) \cdot \delta \vec{r} = 0 \tag{2 - 1}$$

Como $\delta \vec{r}$ é absolutamente arbitrário, realizaremos três experimentos virtuais, adotando:

$$\begin{aligned} \delta \vec{r} &= \delta x \vec{i} \\ \delta \vec{r} &= \delta y \vec{j} \\ \delta \vec{r} &= \delta z \vec{k} \end{aligned} \tag{2 - 2}$$

Para esses experimentos virtuais, a expressão do Princípio de d'Alembert adquire as formas seguintes:

$$\begin{aligned}(F_x - m\ddot{x})\delta x &= 0 \\ (F_y - m\ddot{y})\delta y &= 0 \\ (F_z - m\ddot{z})\delta z &= 0\end{aligned}\tag{2-3}$$

Somando-se, em seguida, as três equações anteriores, resulta:

$$m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z\tag{2-4}$$

Calculando-se a energia cinética da partícula, ou seja,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\tag{2-5}$$

e sendo

$$\delta T = m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z)\tag{2-6}$$

a variação de T correspondente ao deslocamento virtual $\delta\vec{r}$ arbitrário, vemos que a equação 2-4 expressa a equivalência entre a variação virtual da energia cinética da partícula e o trabalho virtual realizado pelas forças a ela aplicadas ao longo desse deslocamento virtual, ou seja:

$$\delta T = \delta\tau\tag{2-7}$$

3. Princípio de d'Alembert aplicado ao movimento de uma partícula vinculada a uma superfície

Admitiremos agora que a partícula se mova sob a ação de forças ativas e reativas que a obrigam a manter-se sobre uma superfície sem atrito. Para simplificar a análise, suporemos que essa superfície seja uma casca esférica côncava (Fig. 4-a) e que a resultante \vec{F} das forças ativas e reativas não faça a partícula, em qualquer momento, perder contato com a superfície.

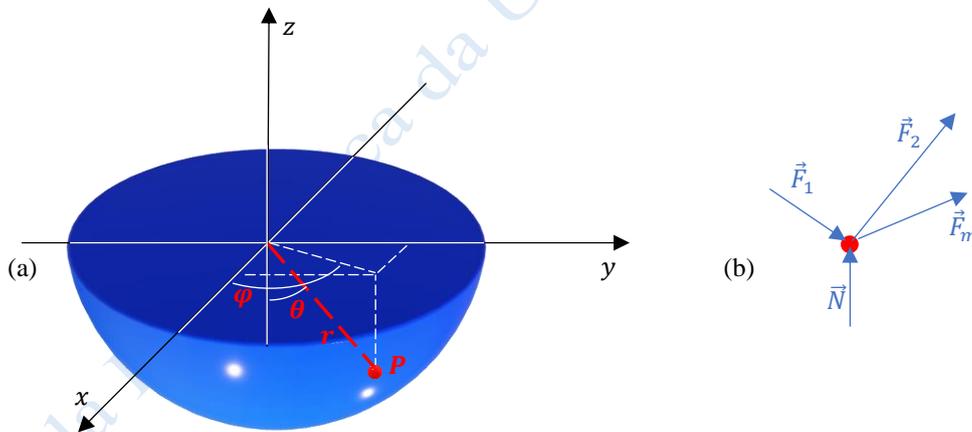


Figura 4. (a) Partícula vinculada a superfície; (b) Forças agentes na partícula.

Adotando-se θ e φ como coordenadas generalizadas, obtêm-se as seguintes equações vinculares:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{3-1}$$

Aplicaremos, agora, um deslocamento virtual compatível com os vínculos, ou seja, tal que:

$$\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \delta \varphi \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \delta \varphi\end{aligned}\quad (3-2)$$

As derivadas parciais da equação acima são determinadas a partir das equações vinculares, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}\quad (3-3)$$

Para um tal deslocamento virtual, a força reativa \vec{N} aplicada pela superfície à partícula (Fig. 4-b) não realiza trabalho virtual. Assim, chamando-se de \vec{F} à resultante das forças ativas \vec{F}_i , ou seja,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i \quad (3-4)$$

o Princípio de d'Alembert se expressa como:

$$[F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} - m(\ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k})](\delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}) = 0 \quad (3-5)$$

Desenvolvendo-se a equação anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}\left(F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} - m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial \theta}\right) \delta \theta + \left(F_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} - m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) \delta \varphi + \\ \left(F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} - m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \delta \theta + \left(F_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} - m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) \delta \varphi + \\ \left(F_z \frac{\partial z}{\partial \theta} - m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \delta \theta + \left(F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi} - m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) \delta \varphi = 0\end{aligned}\quad (3-6)$$

Substituindo-se na equação acima as equações vinculares 3-1, obtém-se:

$$\begin{aligned}(F_x - m\ddot{x})r \cos \theta \cos \varphi \delta \theta + (F_x - m\ddot{x})(-r \sin \theta \sin \varphi) \delta \varphi + \\ (F_y - m\ddot{y})r \cos \theta \sin \varphi \delta \theta + (F_y - m\ddot{y})r \sin \theta \cos \varphi \delta \varphi + \\ (F_z - m\ddot{z})(-r \sin \theta) \delta \theta + (F_z - m\ddot{z}) \cdot 0 \cdot \delta \varphi = 0\end{aligned}\quad (3-7)$$

Sendo arbitrários os deslocamentos virtuais, podemos realizar dois experimentos virtuais – um com $\delta \theta \neq 0$ e $\delta \varphi = 0$, outro com $\delta \theta = 0$ e $\delta \varphi \neq 0$. Assim procedendo, obtêm-se duas equações diferenciais independentes, a saber:

$$\begin{aligned}[(F_x - m\ddot{x})r \cos \theta \cos \varphi + (F_y - m\ddot{y})r \cos \theta \sin \varphi - (F_z - m\ddot{z})r \sin \theta] \delta \theta = 0 \\ [-(F_x - m\ddot{x})r \sin \theta \sin \varphi + (F_y - m\ddot{y})r \sin \theta \cos \varphi] \delta \varphi = 0\end{aligned}\quad (3-8)$$

É importante destacar que a integração dessas equações diferenciais geradas pelo Princípio de d'Alembert é uma tarefa nada trivial, uma vez que requer a variação simultânea de variáveis do espaço euclidiano (x, y, z) e do espaço de configurações (θ, φ) .

Nos próximos tópicos mostraremos como, a partir do Princípio de d'Alembert, Lagrange deduziu equações onde aparecem apenas coordenadas generalizadas. Essas equações, chamadas de **equações de Lagrange**, permitem gerar um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem, em que n é o número de graus de liberdade do sistema considerado.

4. Equações de Lagrange para uma partícula móvel vinculada a uma superfície

Admitiremos que a partícula P se mova sobre uma superfície contínua e isenta de atrito, sob a ação de um sistema de forças de resultante \vec{F} (Fig. 5). Suporemos ainda que a forma da superfície seja arbitrária e que as forças aplicadas a P mantenham-na em contato permanente com a superfície.

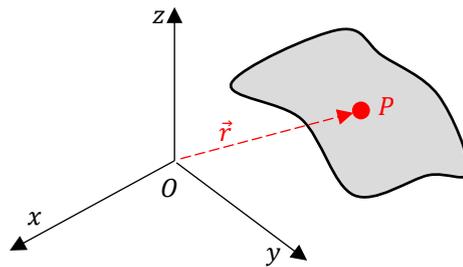


Figura 5. Ponto móvel sobre superfície contínua e arbitrária.

Para uma superfície qualquer, as equações vinculares têm a forma:

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2) \\ y &= y(q_1, q_2) \\ z &= z(q_1, q_2) \end{aligned} \quad (4 - 1)$$

onde (q_1, q_2) são as coordenadas generalizadas que descrevem a posição de um ponto P sobre a superfície.

Aplicando-se a P um deslocamento virtual compatível com os vínculos obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 \end{aligned} \quad (4 - 2)$$

Substituindo-se esse deslocamento virtual $\delta \vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$ na equação do Princípio de d'Alembert, resulta:

$$\begin{aligned} &\left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} - m \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} - m \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \\ &\left(F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} - m \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} - m \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \\ &\left(F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} - m \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} - m \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 = 0 \end{aligned} \quad (4 - 3)$$

Como q_1 e q_2 são variáveis independentes, focalizaremos nossa atenção sobre $\delta\tau_{q_1}$ – trabalho virtual correspondente a um experimento virtual em que $\delta q_2 = 0$ e $\delta q_1 \neq 0$. Nessas condições, 4-3 adquire a forma:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \quad (4-4)$$

A dedução que segue visa transformar os termos $\ddot{x} \partial x / \partial q_1, \ddot{y} \partial y / \partial q_1, \ddot{z} \partial z / \partial q_1$ em funções dependentes das coordenadas e das velocidades generalizadas. Dada a semelhança algébrica desses três termos, consideraremos apenas o termo $\ddot{x} \partial x / \partial q_1$.

Derivando-se $\dot{x} \partial x / \partial q_1$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \quad (4-5)$$

Assim, resulta que:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \quad (4-6)$$

Observemos que a derivada de x , dx/dt , pode ser escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \quad (4-7)$$

No entanto, como a superfície, por hipótese, é fixa no espaço, tem-se :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (4-8)$$

Além disso, o experimento virtual aplicado ao problema considera $\delta q_2 = 0$. Assim, 4-7 se transforma em :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} \quad (4-9)$$

Consideremos agora a expressão $\partial \dot{x} / \partial \dot{q}_1$. Notemos que ela pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} \right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt} \right)} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \quad (4-10)$$

Considerando-se agora o termo $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)$, notemos que ele pode ser escrito na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \quad (4-11)$$

Como a superfície é fixa e a expressão $\partial x / \partial q_1$ não depende explicitamente do tempo¹, tem-se:

¹ Para que isso fique claro, é suficiente analisar a primeira das equações 3-1, válida para o caso de a superfície ser esférica. Note-se que, adotando-se $q_1 = \theta$, resulta $\frac{\partial x}{\partial q_1} = r \cos \theta \cos \varphi$, a qual não depende explicitamente do tempo.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = 0 \quad (4 - 12)$$

Dessa forma, resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 \quad (4 - 13)$$

Retomemos, novamente, a equação 4-7, lembrando que $\partial x / \partial t = 0$, ou seja :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} \quad (4 - 14)$$

Derivando-se parcialmente essa equação com relação a q_1 , obtém-se:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 \right) \quad (4 - 15)$$

Neste ponto, é importante salientar que **as velocidades generalizadas (no caso, \dot{q}_1, \dot{q}_2) são independentes das coordenadas generalizadas (no caso, q_1, q_2)**. Essa independência tem sua origem no fato de que os experimentos virtuais baseados, tanto em deslocamentos virtuais, quanto em velocidades virtuais, são absolutamente arbitrários.

As considerações anteriores nos levam a concluir que a equação 4-15 se transforma em:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 \quad (4 - 16)$$

Comparando-se os lados direitos das equações 4-13 e 4-16, vemos que ambos são idênticos. Assim, concluímos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad (4 - 17)$$

Introduzindo-se esse resultado na equação 4-6, obtém-se:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad (4 - 18)$$

Notemos agora que

$$\frac{\partial \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_1} = 2 \frac{\dot{x}}{2} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} \quad (4 - 19)$$

Introduzindo-se 4-10 em 4-19, obtém-se:

$$\frac{\partial \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_1} = \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \quad (4 - 20)$$

Notemos também que

$$\frac{\partial \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right)}{\partial q_1} = 2 \frac{\dot{x}}{2} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad (4 - 21)$$

Substituindo-se 4-20 e 4-21 em 4-18, resulta:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right)}{\partial q_1} \quad (4-22)$$

Multiplicando-se a equação acima pela massa m da partícula e estendendo-a às componentes y e z , resulta:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \quad (4-23)$$

Lembrando que a energia cinética da partícula é

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

a equação 4-23 adquire a forma

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} \quad (4-24)$$

Finalmente, substituindo-se 4-24 em 4-4, chega-se a

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right] \delta q_1 = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \quad (4-25)$$

É importante destacar que a equação anterior estabelece a igualdade entre o trabalho virtual das forças de inércia (lado esquerdo da equação) e o trabalho virtual das forças aplicadas (lado direito da equação), qualquer que seja o deslocamento virtual δq_1 considerado. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \quad (4-26)$$

Notando-se ainda que o lado direito da equação 4-26 corresponde à componente F_{q_1} da força generalizada (F_{q_1}, F_{q_2}) atuante em P , ou seja:

$$F_{q_1} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \quad (4-27)$$

e aplicando procedimento idêntico para a coordenada generalizada q_2 , chega-se, finalmente, ao par de equações

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= F_{q_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= F_{q_2} \end{aligned} \quad (4-28)$$

As equações 4-28 são as famosas equações de Lagrange. No exemplo considerado, essas equações descrevem o movimento de uma partícula que se move sob a ação de uma força de resultante \vec{F} e que é restrita a mover-se vinculada a uma superfície cuja geometria é função das coordenadas generalizadas q_1, q_2 .

5. Aplicação das equações de Lagrange a sistemas mecânicos compostos por uma única partícula

Nos próximos tópicos apresentaremos alguns problemas de dinâmica do ponto em que as equações de Lagrange são utilizadas para gerar as equações diferenciais que governam o movimento da partícula.

5.1. Movimento balístico sem atrito

Consideremos o movimento de um projétil relativamente a eixos retangulares ligados à Terra (Fig. 6).

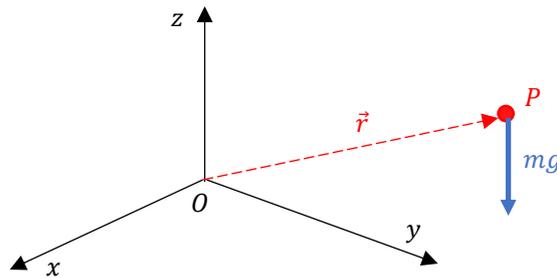


Figura 6. Partícula livre sujeita exclusivamente à ação da força peso.

Tratando-se o projétil como uma partícula P de massa m , o sistema de referência $Oxyz$ como inercial e adotando-se x, y, z como coordenadas generalizadas, a energia cinética de P é

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (5.1 - 1)$$

Os termos que comparecem na equação de Lagrange são calculados abaixo:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (5.1 - 2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \quad (5.1 - 3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (5.1 - 4)$$

$$F_x = F_x \frac{\partial x}{\partial x} = 0 \cdot 1 = 0 \quad F_y = F_y \frac{\partial y}{\partial y} = 0 \cdot 1 = 0 \quad F_z = F_z \frac{\partial z}{\partial z} = -mg \quad (5.1 - 5)$$

Finalmente, aplicando-se as equações de Lagrange, obtêm-se

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg \end{aligned} \quad (5.1 - 6)$$

ou seja, as equações diferenciais de segunda ordem que governam o movimento balístico sem atrito.

Essas equações são facilmente integráveis, desde que se conheçam as condições iniciais do movimento, ou seja, a posição (x_0, y_0, z_0) e a velocidade $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ da partícula no instante $t = 0$.

5.2. Movimento de partícula vinculada a curva plana

Um anel de massa m desliza sobre um arame com forma descrita pela equação $y = bx^2$ (Fig. 7). Estude o movimento do anel, desprezando as forças de atrito.

Esse sistema mecânico possui 1 grau de liberdade, devido às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} y &= bx^2 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (5.2 - 1)$$

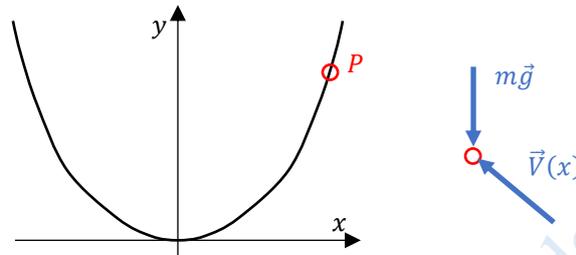


Figura 7. Partícula móvel ligada a um arame.

A energia cinética do sistema é dada por:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (5.2 - 2)$$

Da primeira equação vincular 5.2-1, deduzimos que

$$\dot{y} = 2bx\dot{x} \quad (5.2 - 3)$$

Adotando-se x como coordenada generalizada, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + 4b^2 x^2) \quad (5.2 - 4)$$

A partir da expressão acima, obtêm-se os termos das equações de Lagrange, a saber :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4b^2 x^2) \quad (5.2 - 5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}(1 + 4b^2 x^2) + 8mb^2 \dot{x}^2 x \quad (5.2 - 6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4mb^2 x \dot{x}^2 \quad (5.2 - 7)$$

Notando que a força vincular \vec{V} não realiza trabalho para deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos, tem-se:

$$F_x = F_y \frac{\partial y}{\partial x} = -mg \cdot 2bx \quad (5.2 - 8)$$

Aplicando-se, finalmente, a equação de Lagrange, obtêm-se a equação diferencial de segunda ordem que governa o movimento do anel vinculado ao arame, ou seja:

$$m\ddot{x}(1 + 4b^2 x^2) + 4mb^2 \dot{x}^2 x = -2mgbx \quad (5.2 - 9)$$

5.3. Movimento pendular plano em campo elástico

Consideremos uma massa puntual m ligada a uma mola de constante elástica k , movendo-se no plano xy sob a ação do campo gravitacional, conforme ilustrado na Fig. 8.

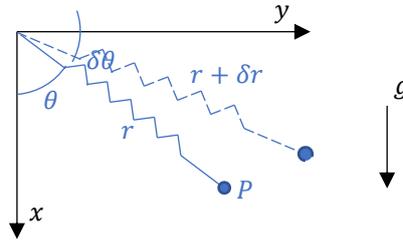


Figura 8. Movimento plano de partícula pesada sujeita a força elástica.

Como há uma única partícula e o seu movimento é restrito ao plano $z = 0$, o sistema tem 2 graus de liberdade. Admitindo-se como coordenadas generalizadas r e θ , a energia cinética de P se expressa como:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (5.3 - 1)$$

A força resultante que age na partícula é

$$\vec{F} = mg\vec{i} - k(r - r_0) \cos \theta \vec{i} - k(r - r_0) \sin \theta \vec{j} \quad (5.3 - 2)$$

onde r_0 é o comprimento natural da mola.

Os termos que comparecem nas duas equações de Lagrange são apresentados abaixo:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 \quad (5.3 - 3)$$

$$F_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\Rightarrow F_r = [mg - k(r - r_0) \cos \theta] \cos \theta + [-k(r - r_0) \sin \theta] \sin \theta$$

$$\Rightarrow F_r = -k(r - r_0) + mg \cos \theta \quad (5.3 - 4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = mr^2 \ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (5.3 - 5)$$

$$F_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow F_\theta = [mg - k(r - r_0) \cos \theta](-r \sin \theta) + [-k(r - r_0) \sin \theta]r \cos \theta$$

$$\Rightarrow F_\theta = -mgr \sin \theta \quad (5.3 - 6)$$

Montando-se as equações de Lagrange com os termos calculados acima, obtêm-se as equações diferenciais que governam o movimento da partícula, a saber:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -k(r - r_0) + mg \cos \theta$$

$$mr^2 \ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -mgr \sin \theta \quad (5.3 - 7)$$

6. Equações de Lagrange para uma partícula em movimento sujeita a vínculos reônomos

Admitiremos, agora, que a partícula se mova sobre uma superfície **móvel**, sujeita à ação de um sistema de forças de resultante \vec{F} (Fig. 9). Suporemos, ainda, que não haja atrito e que a partícula não perca contato com a superfície durante o movimento.

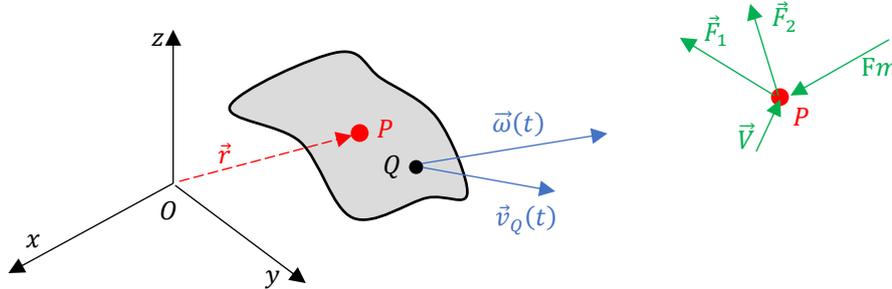


Figura 9. Partícula móvel sobre superfície móvel.

Suporemos também que o movimento da superfície ao longo do tempo seja conhecido *a priori*, isto é, que $\vec{v}_Q(t)$ e $\vec{\omega}(t)$ sejam funções **impostas** por meio de algum sistema de controle, de modo que a superfície seja obrigada a mover-se segundo uma lei bem determinada.

Aplicando-se o Princípio de d'Alembert à partícula, tem-se:

$$(m\ddot{x} - F_x)\delta x + (m\ddot{y} - F_y)\delta y + (m\ddot{z} - F_z)\delta z = 0 \quad (6 - 1)$$

onde $\delta x, \delta y, \delta z$ são as componentes de um deslocamento virtual $\delta\vec{P}$ arbitrário e F_x, F_y, F_z são as componentes da resultante das forças que agem sobre a partícula, incluindo-se a força vincular (mas deve-se lembrar que o trabalho desta força é nulo, uma vez que não há atrito).

Como a partícula é obrigada a mover-se sobre uma superfície móvel, seu movimento está sujeito às seguintes equações vinculares:

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, t) \\ y &= y(q_1, q_2, t) \\ z &= z(q_1, q_2, t) \end{aligned} \quad (6 - 2)$$

É importante destacar que, nas equações anteriores, o tempo aparece **explicitamente**, dado que a superfície é móvel.

Dessa forma, os deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos, são:

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial t} \delta t \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial t} \delta t \end{aligned} \quad (6 - 3)$$

Substituindo-se as equações acima em 6-1, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& (m\ddot{x} - F_x) \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial t} \delta t \right) + \\
& (m\ddot{y} - F_y) \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t \right) + \\
& (m\ddot{z} - F_z) \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial t} \delta t \right) = 0
\end{aligned} \tag{6-4}$$

Como $\delta q_1, \delta q_2, \delta t$ são deslocamentos virtuais **arbitrários e independentes**, realizaremos os seguintes experimentos virtuais:

- $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = 0, \delta t = 0$
- $\delta q_1 = 0, \delta q_2 \neq 0, \delta t = 0$

Nesses dois experimentos considera-se que P se mova, a partir do instante $t = 0$, sobre a superfície **tal como esta se encontra neste exato instante**. Portanto, tudo se passa como se a superfície se mantivesse invariante para esses deslocamentos virtuais impostos a P .

Feitas as considerações anteriores, a equação 6-4, para o primeiro dos experimentos virtuais, adquire a seguinte forma:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \tag{6-5}$$

Constata-se, neste ponto, que a expressão do Princípio de d'Alembert para uma partícula móvel sujeita a vínculos reônomos não difere da que fora obtida previamente para uma partícula móvel sujeita a vínculos esclerônomos (vide eq. 4-4).

Logo, partindo-se de 6-5, referente ao experimento virtual (a) e de

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 \tag{6-6}$$

referente ao experimento virtual (b), chega-se a equações de Lagrange **idênticas** às que se haviam obtido previamente, ou seja :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial Y}{\partial q_1} &= F_{q_1} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial Y}{\partial q_2} &= F_{q_2}
\end{aligned} \tag{6-7}$$

É importante, ainda, destacarmos alguns aspectos do cálculo da energia cinética e do trabalho virtual das forças generalizadas para partículas sujeitas a vínculos reônomos.

A energia cinética, de modo geral, deve ser expressa em coordenadas de um **sistema de referência inercial**. Contudo, pode-se expressá-la em termos das coordenadas do referencial móvel, desde que se introduza explicitamente a variável tempo nas expressões dessas coordenadas.

O trabalho virtual das forças generalizadas, ou seja,

$$\delta \tau_{q_i} = F_{q_i} \cdot \delta q_i = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i \tag{6-8}$$

não contém qualquer alusão a t . Logo, deve ser calculado **considerando-se que os vínculos são invariantes no tempo, ou seja, esclerônomos**.

Para finalizar este tópico, salientamos que a equação do Princípio de d'Alembert, para um experimento virtual em que $\delta q_1 = 0, \delta q_2 = 0, \delta t \neq 0$, adquire a forma:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial t} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial t} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \delta t = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial t} + F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_z \frac{\partial z}{\partial t} \right) \delta t \quad (6-9)$$

Note-se que a equação anterior não desperta qualquer interesse, pois apenas expressa a equivalência entre o trabalho virtual das forças de inércia e o trabalho virtual da resultante das forças aplicadas à partícula, algo que já se conhecia desde o início.

No tópico a seguir apresenta-se um exemplo de aplicação das equações de Lagrange ao estudo do movimento de uma partícula sujeita a vínculos reônomos.

7. Exemplo de aplicação: partícula móvel sobre barra giratória

Uma barra de massa desprezível gira em torno de um eixo fixo, enquanto um pequeno anel de massa m desliza sobre a barra sob a ação de uma força \vec{F} (Fig. 10). Determinar as equações de movimento do anel, sabendo que a barra gira com velocidade angular constante ω .

A energia cinética da partícula é dada por

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (7-1)$$

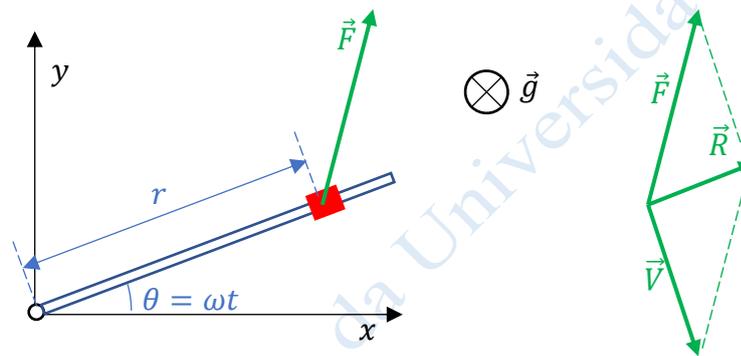


Figura 10. Anel móvel sobre barra giratória.

Notemos, porém, que

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega t \\ y &= r \sin \omega t \end{aligned} \quad (7-2)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \omega t - r \omega \sin \omega t \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \omega t + r \omega \cos \omega t \end{aligned} \quad (7-3)$$

Introduzindo-se 7-3 em 7-1, obtém-se

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 \cos^2 \omega t - 2r\dot{r}\omega \cos \omega t \sin \omega t + r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t) + \\ &+ \frac{m}{2} (\dot{r}^2 \sin^2 \omega t + 2r\dot{r}\omega \cos \omega t \sin \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) \end{aligned} \quad (7-4)$$

Da expressão acima obtêm-se os termos da equação de Lagrange, ou seja:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m r \omega^2 \quad (7-5)$$

$$F_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos \omega t + F_y \sin \omega t \tag{7 - 6}$$

Antes de prosseguir, é importante salientar que esse sistema possui 1 grau de liberdade, uma vez que o movimento da barra é conhecido *a priori*. Assim, a posição radial r é a coordenada generalizada natural para descrever a configuração do anel. Deve-se também notar que a força vincular \vec{V} é normal à barra, pois não há atrito; logo, o trabalho virtual dessa força é nulo para deslocamentos virtuais admissíveis.

Analisando-se a expressão 7-6, constata-se que F_r corresponde exatamente à projeção de \vec{F} na direção da barra, conforme ilustrado na Fig. 11.

Combinando-se os termos 7-5 e 7-6 na equação de Lagrange, obtém-se, finalmente, a equação diferencial que governa o movimento do anel vinculado a uma barra que gira com velocidade angular constante e conhecida *a priori*:

$$m(\ddot{r} - r\omega^2) = F_x \cos \omega t + F_y \sin \omega t \tag{7 - 7}$$

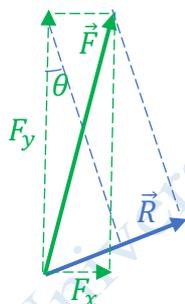


Figura 11. Interpretação geométrica da força generalizada F_r .

8. Equações de Lagrange para um sistema de partículas

Consideraremos agora um sistema de p partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_p , sobre as quais atuam forças de resultantes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_p$, respectivamente (Fig. 12).

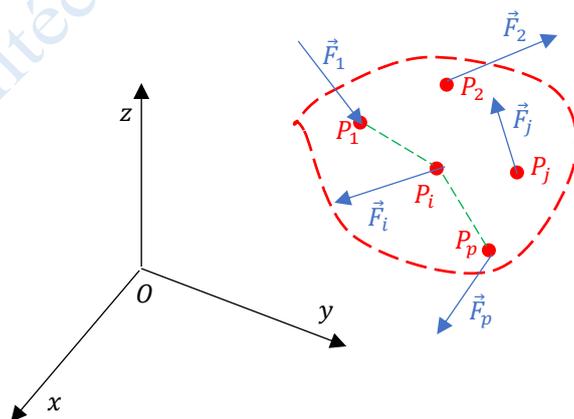


Figura 12. Sistema de partículas vinculadas movendo-se sob a ação de forças.

Aplicando-se o Princípio de d'Alembert a esse sistema de partículas, tem-se:

$$\sum_{i=1}^p \{(m_i \ddot{x}_i - F_{xi}) \delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - F_{yi}) \delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - F_{zi}) \delta z_i\} = 0 \quad (8-1)$$

Admitiremos que esse sistema tenha n graus de liberdade, com $n < 3p$, e que existam equações vinculares da forma

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \quad (8-2)$$

Nessas condições, os deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos se expressam como:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n} \delta q_n \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n} \delta q_n \end{aligned} \quad (8-3)$$

Substituindo-se 8-3 em 8-1, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \left\{ \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} - F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \dots + \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_n} - F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \right) \delta q_n + \right. \\ \left. \left(m_i \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} - F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \dots + \left(m_i \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_n} - F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_n} \right) \delta q_n + \right. \\ \left. \left(m_i \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} - F_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \dots + \left(m_i \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_n} - F_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_n} \right) \delta q_n \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8-4)$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, consideraremos experimentos virtuais em que

$$\begin{aligned} \delta q_1 \neq 0, \delta q_i = 0 \quad \forall i \neq 1 \\ \delta q_2 \neq 0, \delta q_i = 0 \quad \forall i \neq 2 \\ \dots \\ \delta q_n \neq 0, \delta q_i = 0 \quad \forall i \neq n \end{aligned} \quad (8-5)$$

Realizando-se o primeiro dos experimentos virtuais acima, chega-se a

$$\sum_{i=1}^p \left\{ \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} - F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(m_i \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} - F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(m_i \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} - F_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \right\} = 0 \quad (8-6)$$

Vê-se que a equação anterior tem a mesma forma da equação 4-3, caso desconsideremos o sinal da somatória. Logo, conclui-se que 8-6 dará origem a equações de Lagrange em que a expressão da energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (8-7)$$

E assim, chega-se a um sistema de n equações de Lagrange para um sistema material de p partículas sujeitas a n vínculos holônimos (reônimos ou esclerônimos), ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= F_{q_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= F_{q_2} \\ &\dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} &= F_{q_n} \end{aligned} \quad (8-8)$$

onde

$$F_{q_i} = \sum_{j=1}^p \left(F_{x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{z_j} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right) \quad (8-9)$$

Nos dois exemplos que seguem, mostraremos como aplicar essas equações para determinar as equações diferenciais que governam o movimento de um sistema de partículas e de um corpo rígido.

9. Exemplo de aplicação das equações de Lagrange a um sistema material em movimento

No sistema de polias ilustrado na Fig. 13, as massas das polias e dos cabos são desprezíveis comparativamente às massas m_1, m_2, m_3 dos blocos. Admitindo-se que os cabos sejam inextensíveis, pede-se determinar as equações diferenciais que governam o movimento do sistema.

Como os cabos são inextensíveis, o sistema possui 2 graus de liberdade. Adotaremos y_1 e y_2 como coordenadas generalizadas.

A invariância dos comprimentos dos cabos fornece duas equações vinculares, a saber:

$$s_1 + \pi r_1 + y_1 = C_1 \quad (9-1)$$

$$y_2 + \pi r_2 + (\ell - s_1 - s_3) = C_2 \quad (9-2)$$

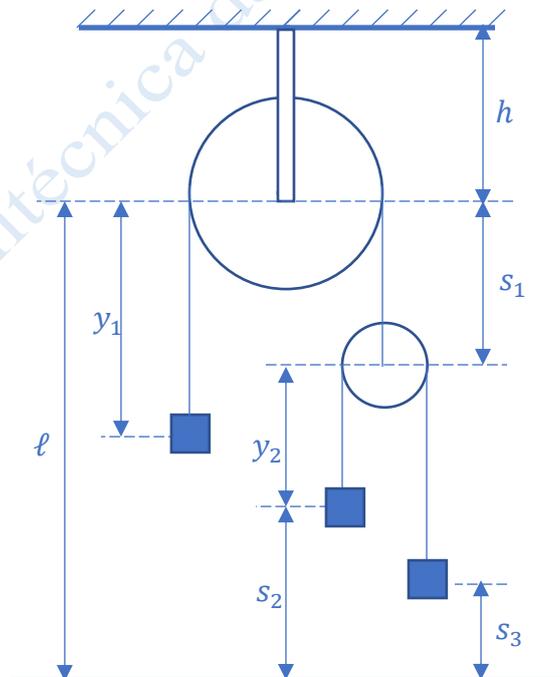


Figura 13. Sistema de polias em movimento.

A energia cinética do sistema de polias é dada por:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{s}_2^2 + m_3 \dot{s}_3^2) \quad (9 - 3)$$

É importante enfatizar que a energia cinética deve ser calculada utilizando-se velocidades medidas em um referencial inercial. Observe que, no problema em foco, utilizaram-se \dot{y}_1 , \dot{s}_2 e \dot{s}_3 , que são velocidades generalizadas absolutas.

Para se expressar essas velocidades generalizadas em termos das coordenadas generalizadas y_1, y_2 (as que foram escolhidas neste exemplo), derivam-se, inicialmente, as equações vinculares 9-1 e 9-2, obtendo-se:

$$\dot{s}_1 + \dot{s}_2 = 0 \quad (9 - 4)$$

$$\dot{y}_2 - \dot{s}_1 - \dot{s}_3 = 0 \quad (9 - 5)$$

Introduzindo-se 9-4 em 9-5, resulta:

$$\dot{s}_3 = \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \quad (9 - 6)$$

Examinando-se a Fig. 13, nota-se que

$$s_2 + y_2 + s_1 = \ell \quad (9 - 7)$$

Derivando-se a equação anterior, tem-se:

$$\dot{s}_1 + \dot{s}_2 + \dot{y}_2 = 0 \quad (9 - 8)$$

Substituindo-se 9-4 em 9-8, obtém-se:

$$\dot{s}_2 = \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \quad (9 - 9)$$

Introduzindo-se 9-6 e 9-9 em 9-3, chega-se a:

$$T = \frac{1}{2} [m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + m_3 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2] \quad (9 - 10)$$

Para a coordenada generalizada y_1 calculam-se os termos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \dot{y}_1 + m_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + m_3 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \right) = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_1 + (m_3 - m_2) \ddot{y}_2 \quad (9 - 11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_1} = 0$$

e, para a coordenada generalizada y_2 calculam-se os termos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} = m_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) (-1) + m_3 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} \right) = (m_3 - m_2) \ddot{y}_1 + (m_2 + m_3) \ddot{y}_2 \quad (9 - 12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_2} = 0$$

Finalmente, para calcular as forças generalizadas, utilizaremos o conceito de trabalho virtual.

Notemos que o trabalho virtual associado ao deslocamento virtual δy_1 é o que se obtém quando $\delta y_1 \neq 0, \delta y_2 = 0$, isto é:

$$\delta\tau_{y_1} = F_{y_1} \cdot \delta y_1 \quad (9 - 13)$$

Para calcular esse trabalho, realizamos um experimento virtual em que se fixa y_2 e se varia y_1 . Em assim procedendo-se (vide Fig. 13), concluímos que $\delta\tau_{y_1}$ é dado por:

$$\delta\tau_{y_1} = m_1 g \delta y_1 - (m_2 + m_3) g \delta y_1 \quad (9 - 14)$$

Da expressão anterior, chega-se a:

$$F_{y_1} = (m_1 - m_2 - m_3) g \quad (9 - 15)$$

De forma análoga, obtemos F_{y_2} a partir de um experimento virtual com $\delta y_1 = 0, \delta y_2 \neq 0$. Para esse experimento virtual, o trabalho virtual é:

$$\delta\tau_{y_2} = F_{y_2} \cdot \delta y_2 \quad (9 - 16)$$

ou seja,

$$\delta\tau_{y_2} = (m_2 - m_3) g \delta y_2 \quad (9 - 17)$$

Da expressão anterior, resulta que:

$$F_{y_2} = (m_2 - m_3) g \quad (9 - 18)$$

Substituindo-se os termos 9-11, 9-12, 9-15 e 9-18 nas equações de Lagrange, obtêm-se as duas equações diferenciais que governam o movimento do sistema de polias a saber:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_1 + (m_2 + m_3) \ddot{y}_2 &= (m_1 - m_2 - m_3) g \\ (m_3 - m_2) \ddot{y}_1 + (m_2 + m_3) \ddot{y}_2 &= (m_2 - m_3) g \end{aligned} \quad (9 - 19)$$

10. Exemplo de aplicação das equações de Lagrange a um corpo rígido em movimento

A Fig. 14 mostra um mecanismo constituído por um disco de raio r e massa m ligado rigidamente a uma haste de massa desprezível que gira com velocidade angular conhecida $\dot{\psi} = \dot{\psi}(t)$ em relação a um suporte, o qual, por sua vez, gira com velocidade angular conhecida $\dot{\phi} = \dot{\phi}(t)$ em relação ao eixo vertical. Sendo θ o ângulo constante formado entre o eixo de rotação própria do disco e o eixo vertical, determinar os torques aplicados pelos motores que acionam o eixo do disco e o suporte, de forma a que o movimento descrito seja possível.

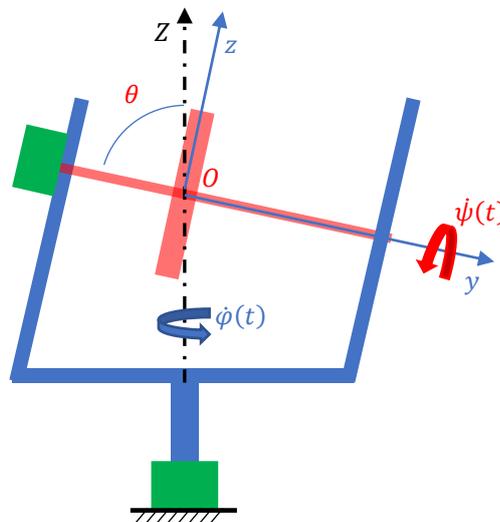


Figura 14. Disco giratório ligado a um suporte giratório.

O vetor rotação instantânea do disco é dado por:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{j} + \dot{\phi}\vec{K} \quad (10 - 1)$$

Expressando-se $\vec{\omega}$ na base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ associada aos eixos x, y, z ligados ao suporte, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\phi}[(\vec{K} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{K} \cdot \vec{k})\vec{k}] + \dot{\psi}\vec{j} = \dot{\phi}[\cos(180^\circ - \theta)\vec{j} + \cos(90^\circ - \theta)\vec{k}] + \dot{\psi}\vec{j} = \dot{\phi} \\ \Rightarrow \vec{\omega} &= \dot{\phi}(-\cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{k}) + \dot{\psi}\vec{j} = (\dot{\psi} - \dot{\phi}\cos\theta)\vec{j} + \dot{\phi}\sin\theta\vec{k} \end{aligned} \quad (10 - 2)$$

A energia cinética do disco é dada por:

$$T = \frac{1}{2} [\omega]^T [J_o] [\omega] \quad (10 - 3)$$

Desenvolvendo-se a expressão acima, tem-se:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [0 \quad \dot{\psi} - \dot{\phi}\cos\theta \quad \dot{\phi}\sin\theta] \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} - \dot{\phi}\cos\theta \\ \dot{\phi}\sin\theta \end{bmatrix} \\ \Rightarrow T &= \frac{mr^2}{4} \left[(\dot{\psi} - \dot{\phi}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\sin^2\theta \right] \end{aligned} \quad (10 - 4)$$

A seguir, calculam-se os termos das equações de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{mr^2}{2} (\dot{\psi} - \dot{\phi}\cos\theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \frac{mr^2}{2} (\ddot{\psi} - \ddot{\phi}\cos\theta) \end{aligned} \quad (10 - 5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{mr^2}{4} \dot{\phi}\sin\theta + \frac{mr^2}{2} (\dot{\psi} - \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{mr^2}{4} \ddot{\phi}\sin\theta + \frac{mr^2}{2} (\ddot{\psi} - \ddot{\phi}\cos\theta)\cos\theta \end{aligned} \quad (10 - 6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

Com relação às forças generalizadas, estas serão constituídas a partir de experimentos virtuais convenientes.

A força generalizada F_ψ é explicitada em um experimento virtual com $\delta\phi = 0, \delta\psi \neq 0$, de modo a que se produza o trabalho virtual

$$\delta\tau_\psi = F_\psi \cdot \delta\psi \quad (10 - 7)$$

Analogamente, para explicitar a força generalizada F_ϕ realiza-se um experimento virtual com $\delta\phi \neq 0, \delta\psi = 0$, de modo a produzir o trabalho virtual

$$\delta\tau_\phi = F_\phi \cdot \delta\phi \quad (10 - 8)$$

As equações 10-7 e 10-8 evidenciam que as forças generalizadas F_ψ e F_φ têm a dimensão de torques. Construindo-se as equações de Lagrange com os termos 10-5 a 10-8, conclui-se que, para que o movimento descrito seja possível, é necessário que os motores apliquem ao eixo do disco e ao eixo vertical os torques $F_\psi(t)$ e $F_\varphi(t)$ determinados a partir da integração das equações diferenciais de segunda ordem a seguir:

$$F_\psi(t) = \frac{mr^2}{4} \ddot{\varphi} \sin \theta + \frac{mr^2}{2} (\ddot{\psi} - \ddot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta$$

$$F_\varphi(t) = \frac{mr^2}{2} (\ddot{\psi} - \ddot{\varphi} \cos \theta)$$
(10 – 9)

11. Forças conservativas e potencial de energia

Quando o trabalho realizado pelas forças que atuam sobre um sistema material depende apenas das coordenadas inicial e final das partículas, diz-se que as forças atuantes são conservativas.

O trabalho realizado pelas forças conservativas para fazer com que o sistema material evolua da configuração genérica $(\vec{P}_1^i, \vec{P}_2^i, \dots, \vec{P}_m^i)$ para uma configuração de referência $(\vec{P}_1^0, \vec{P}_2^0, \dots, \vec{P}_m^0)$ é definido como a **energia potencial V** do sistema material (Fig. 15).

Portanto, para um sistema material composto por m partículas sujeitas a forças conservativas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m$, a energia potencial é dada por:

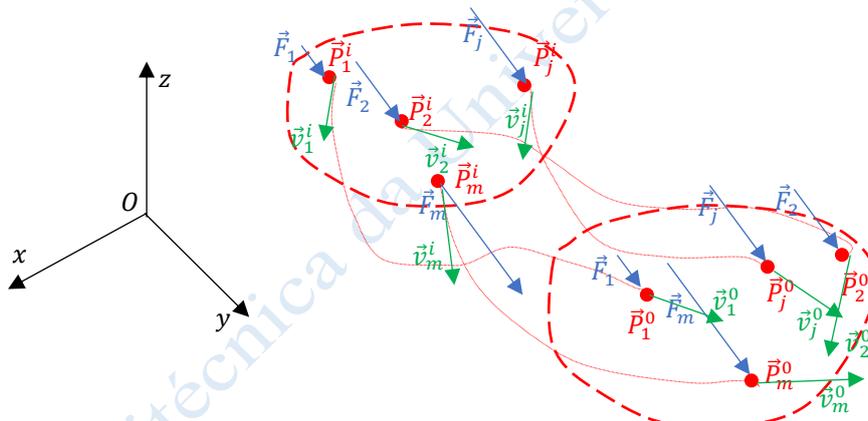


Figura 15. Mudança da configuração de um sistema material sob a ação de forças conservativas.

$$V = \sum_{j=1}^m \int_{\vec{P}_j^i}^{\vec{P}_j^0} \vec{F}_j \cdot d\vec{P} = \sum_{j=1}^m \int_{x_j^i, y_j^i, z_j^i}^{x_j^0, y_j^0, z_j^0} F_{x_j} dx_j + F_{y_j} dy_j + F_{z_j} dz_j$$
(11 – 1)

Conforme já exposto anteriormente, para que o trabalho dessas forças independa das trajetórias percorridas pelas partículas, deve-se ter:

$$F_{x_j} = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \quad F_{y_j} = -\frac{\partial V}{\partial y_j} \quad F_{z_j} = -\frac{\partial V}{\partial z_j}$$
(11 – 2)

ou, equivalentemente,

$$\vec{F}_j = -\nabla V(x_j, y_j, z_j)$$
(11 – 3)

Observe-se ainda que, se as forças \vec{F}_j são conservativas, valem as relações:

$$\frac{\partial F_{x_j}}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial F_{y_j}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial V}{\partial y_j} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial y_j}$$
(11 - 4)

De 11-4, conclui-se que

$$\frac{\partial F_{x_j}}{\partial y_i} - \frac{\partial F_{y_j}}{\partial x_i} = 0$$
(11 - 5)

Estendendo-se a relação acima para as demais combinações de coordenadas, tem-se:

$$\frac{\partial F_{x_j}}{\partial y_i} - \frac{\partial F_{y_j}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial F_{x_j}}{\partial z_i} - \frac{\partial F_{z_j}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial F_{y_j}}{\partial z_i} - \frac{\partial F_{z_j}}{\partial y_i} = 0$$
(11 - 6)

12. Exemplos de sistemas materiais sujeitos a forças conservativas

Em problemas de Engenharia Mecânica, as forças conservativas de maior destaque são a força peso e as forças elásticas.

Nos dois próximos tópicos apresentam-se exemplos de cálculo da energia potencial associada a essas forças.

12.1. Energia potencial de pêndulo

Considere-se o pêndulo simples plano de massa m ilustrado na Fig. 16.

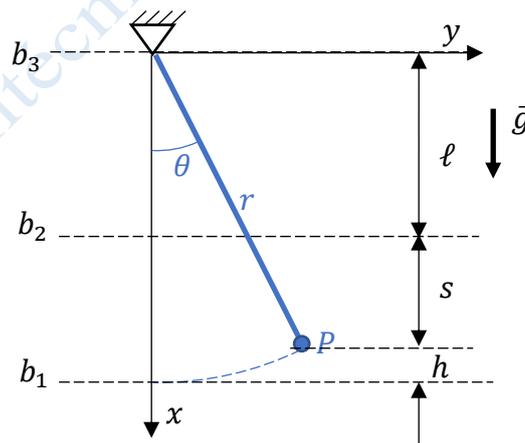


Figura 16. Pêndulo simples plano.

Referida à horizontal b_1 , a energia potencial do pêndulo é:

$$V = mgh$$
(12.1 - 1)

mas, em relação à horizontal b_2 , a energia potencial vale

$$V = -mgs \quad (12.1 - 2)$$

e em relação à horizontal b_3 vale

$$V = -mg(s + \ell) \quad (12.1 - 3)$$

Adotando-se θ como coordenada generalizada do sistema, as expressões anteriores de V adquirem formas similares entre si. Para os 3 níveis de referência b_1, b_2, b_3 , a energia potencial do pêndulo é dada, respectivamente, por:

$$V = mgr - mgr \cos \theta$$

$$V = mg\ell - mgr \cos \theta$$

$$(12.1 - 4)$$

$$V = -mgr \cos \theta$$

Vê-se, portanto, que as 3 expressões anteriores de V são iguais, **a menos de uma constante arbitrária**. Assim, podemos escrever:

$$V = -mgr \cos \theta + C \quad (12.1 - 5)$$

12.2. Energia potencial de mola

Considere-se um pequeno bloco ligado a uma mola de comprimento natural ℓ_0 , conforme ilustrado na Fig.17.

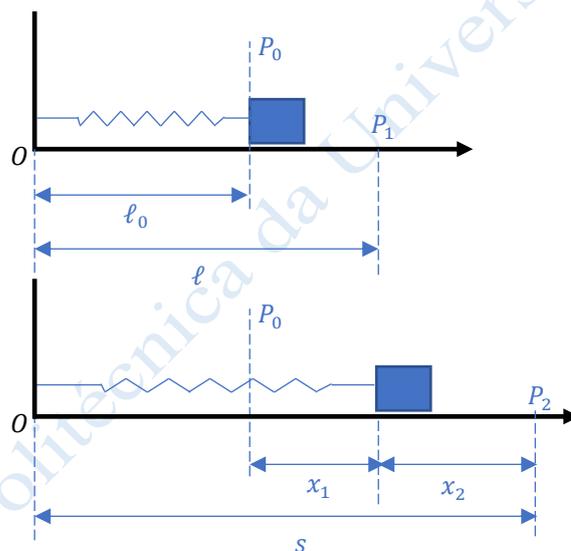


Figura 17. Bloco ligado a mola.

Ao ser distendida ou comprimida, de modo a que seu comprimento atinja o valor ℓ , a mola adquire energia potencial

$$V = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (12.2 - 1)$$

referida à posição neutra P_0 .

Caso se adote como referência a posição P_2 , a energia potencial da mola será:

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(s - \ell_0)^2 \quad (12.2 - 2)$$

Observamos novamente que a expressão da energia potencial apresenta uma constante arbitrária, aliás, de todo irrelevante.

13. Forças conservativas generalizadas

Vimos anteriormente que as componentes das forças generalizadas agentes em um sistema material contendo p partículas sujeitas a vínculos holônimos, são expressas como:

$$F_{q_j} = \sum_{i=1}^p \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (13 - 1)$$

No caso de as forças \vec{F}_i serem conservativas, a expressão anterior adquire a forma:

$$F_{q_j} = \sum_{i=1}^p \left(- \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (13 - 2)$$

ou seja,

$$F_{q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (13 - 3)$$

Considerando-se, a título de exemplo, a energia potencial do pêndulo da Fig. 16, ou seja,

$$V = -mgr \cos \theta \quad (13 - 4)$$

Note mos que a força generalizada F_θ é dada por

$$F_\theta = - \frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta \quad (13 - 5)$$

‘força’ essa que tem a dimensão de momento.

14. Equações de Lagrange para sistemas conservativos

Admitindo-se que atuem no sistema mecânico apenas forças conservativas, as equações de Lagrange adquirem a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (14 - 1)$$

as quais podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0 \quad (14 - 2)$$

Neste ponto definimos a **função lagrangeana** do sistema, também chamada de **lagrangeano** do sistema, como:

$$L = T - V \quad (14 - 3)$$

Notando que, para os sistema mecânicos usuais, V independe de \dot{q}_i , podemos escrever:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (14 - 4)$$

No caso de existirem outras forças não-conservativas agindo sobre o sistema conjuntamente com as forças conservativas, as equações de Lagrange adquirem a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_{q_i}^{nc} \quad (14 - 5)$$

onde $F_{q_i}^{nc}$ é a $i^{\text{ésima}}$ componente da forma generalizada não conservativa agente no sistema.

15. Exemplos de aplicação das equações de Lagrange a sistemas sujeitos a forças conservativas

Nos próximos tópicos obteremos, através das equações de Lagrange, as equações diferenciais que governam dois sistemas mecânicos sujeitos à ação exclusiva de forças conservativas.

15.1. Pêndulo plano suspenso por mola

Considere-se o sistema material constituído por uma massa concentrada m ligada a uma mola de constante elástica k , conforme ilustrado na Fig. 18.

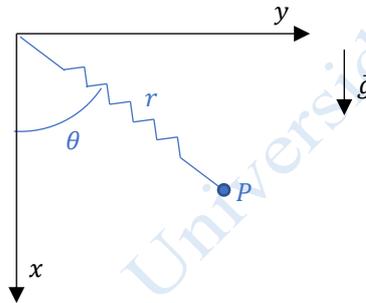


Figura 18. Pêndulo plano sujeito a força elástica.

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (15.1 - 1)$$

A energia potencial do pêndulo, referida ao ponto de equilíbrio estável, é:

$$V = mgr(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 \quad (15.1 - 2)$$

onde r_0 é o comprimento natural da mola.

O lagrangeano do sistema é

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 \quad (15.1 - 3)$$

Os termos necessários à construção das equações de Lagrange são calculados a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= m\ddot{r} \\
\frac{\partial L}{\partial r} &= m\dot{\theta}^2 + mg(1 - \cos \theta) - k(r - r_0) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgr \sin \theta
\end{aligned} \tag{15.1 - 4}$$

Substituindo-se os termos acima nas equações de Lagrange, obtêm-se

$$\begin{aligned}
m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos \theta) + k(r - r_0) &= 0 \\
mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \sin \theta &= 0
\end{aligned} \tag{15.1 - 5}$$

15.2. Barra pivotada, apoiada sobre suspensão elástica

Considere-se a barra de massa desprezível ligada a uma massa concentrada m , tendo sua outra extremidade ligada a uma articulação fixa. Conforme ilustrado na Fig. 19, essa barra apoia-se sobre duas molas de constantes elásticas k_1 e k_2 . Determine a equação de movimento do sistema, admitindo que as molas tenham comprimentos naturais ℓ_1 e ℓ_2 .

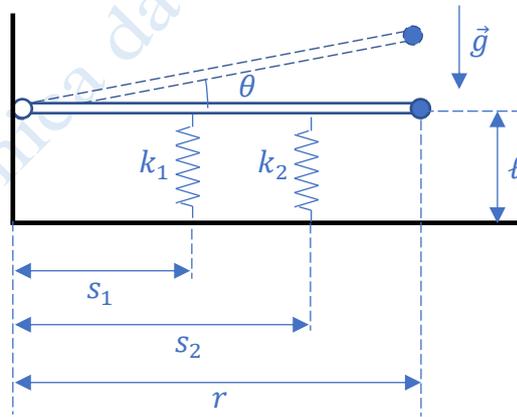


Figura 19. Barra apoiada sobre molas.

A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 \tag{15.2 - 1}$$

Admitindo-se pequenos deslocamentos angulares, a energia potencial do sistema é

$$V \cong \frac{1}{2} k_1 (\ell + s_1 \theta - \ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\ell + s_2 \theta - \ell_2)^2 + mgr \theta \tag{15.2 - 2}$$

O lagrangeano do sistema é

$$L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_1 (\ell + s_1 \theta - \ell_1)^2 - \frac{1}{2} k_2 (\ell + s_2 \theta - \ell_2)^2 - mgr\theta \quad (15.2 - 3)$$

Os termos da equação de Lagrange são calculados a seguir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mr^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -k_1 (\ell + s_1 \theta - \ell_1) s_1 - k_2 (\ell + s_2 \theta - \ell_2) s_2 - mgr \end{aligned} \quad (15.2 - 4)$$

Portanto, a equação diferencial que governa o movimento desse sistema é

$$mr^2 \ddot{\theta} + k_1 s_1 (\ell + s_1 \theta - \ell_1) + k_2 s_2 (\ell + s_2 \theta - \ell_2) + mgr = 0 \quad (15.2 - 5)$$

Admitindo-se que o sistema seja ajustado de forma tal que, na condição de equilíbrio estático ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$), tenha-se:

$$k_1 s_1 (\ell - \ell_1) + k_2 s_2 (\ell - \ell_2) + mgr = 0 \quad (15.2 - 6)$$

ou seja,

$$\ell_2 = \frac{(k_1 s_1 + k_2 s_2) \ell + mgr - k_1 s_1 \ell_1}{k_2 s_2} \quad (15.2 - 7)$$

a equação do movimento assume a forma

$$mr^2 \ddot{\theta} + (k_1 s_1^2 + k_2 s_2^2) \theta = 0 \quad (15.2 - 8)$$

16. Forças dissipativas

Essa categoria abrange todas as forças que dissipam energia quando o sistema está em movimento relativo com o meio.

Em geral, a magnitude das forças dissipativas (Fig. 20) é dada por

$$|\vec{F}| = c |\vec{v}|^n \quad (16 - 1)$$

onde \vec{v} é a velocidade da partícula, medida em um referencial fixo ou móvel, conforme o caso, c é uma constante empírica ou, então, uma função dependente do tempo ou da posição, ou seja,

$$c = c(x, y, z, t) \quad (16 - 2)$$

e n é um número real.

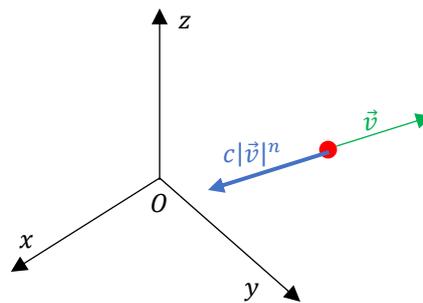


Figura 20. Força dissipativa agente em partícula móvel em relação a um referencial fixo.

Nos próximos tópicos destacaremos dois tipos de forças dissipativas que agem, frequentemente, em sistemas mecânicos – as forças de atrito seco e as forças de atrito viscoso.

16.1. Força de atrito seco

A magnitude dessa força (Fig. 21) é proporcional à componente normal da força de contato entre as superfícies dos corpos que realizam movimento relativo entre si, ou seja:

$$|\vec{F}| = \mu N \quad (16.1 - 1)$$

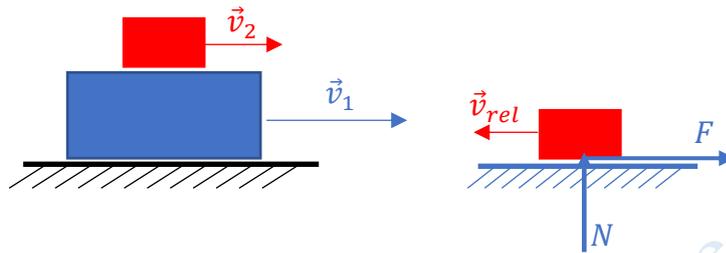


Figura 21. Movimento relativo entre dois blocos em contato sob a ação de forças de atrito seco.

Notemos que a magnitude das forças de atrito seco pode ser expressa como:

$$|\vec{F}| = (\mu N)|\vec{v}_{rel}|^0 = c|\vec{v}_{rel}|^0 \quad (16.1 - 2)$$

onde $c = \mu N$.

O sentido da força de atrito seco é sempre oposto ao da velocidade relativa da superfície sobre a qual ela age, ou seja:

$$\vec{F} = -\mu N \frac{\vec{v}_{rel}}{|\vec{v}_{rel}|} \quad (16.1 - 3)$$

16.2. Forças viscosas

Essas forças (Fig. 22) são proporcionais à **primeira potência** da **velocidade relativa** do corpo sobre cuja superfície elas agem, isto é:

$$|\vec{F}| = c|\vec{v}_{rel}| = c|\vec{v}_{rel}|^1 \quad (16.2 - 1)$$

onde \vec{v}_{rel} é a velocidade relativa do corpo e c é uma constante empírica chamada de **coeficiente de viscosidade**.

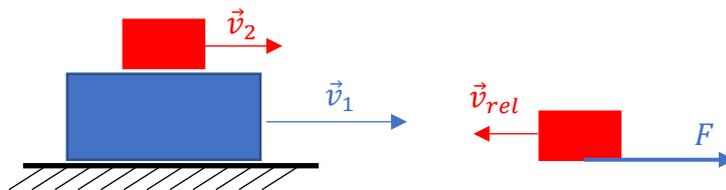


Figura 22. Movimento relativo de dois blocos em contato sob a ação de forças de atrito viscoso.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \dot{q}_n \\
 \dot{y}_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n} \dot{q}_n \\
 \dot{z}_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n} \dot{q}_n
 \end{aligned} \tag{17-5}$$

Adotando-se deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n \\
 \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n} \delta q_n \\
 \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n} \delta q_n
 \end{aligned} \tag{17-6}$$

Introduzindo-se 17-5 e 17-6 em 17-3, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \delta \tau = - \sum_{i=1}^m c_i \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \right. \\
 \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \right. \\
 \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \right\} |\vec{v}_i|^{n-1}
 \end{aligned} \tag{17-7}$$

O desenvolvimento algébrico da expressão anterior dá origem a uma expressão do trabalho virtual das forças dissipativas, da forma:

$$\delta \tau = f_1(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \delta q_1 + \cdots + f_n(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \delta q_n \tag{17-8}$$

onde a componente Q_j da força dissipativa generalizada \vec{Q} é uma função dependente das coordenadas generalizadas e das velocidades generalizadas, ou seja:

$$Q_j = f_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \tag{17-9}$$

No próximo tópico apresentaremos um exemplo onde comparecem forças dissipativas generalizadas devidas a atrito seco.

18. Força de atrito seco agente em partícula

Consideremos uma partícula de massa m que se move apoiada permanentemente sobre um plano inclinado rugoso após receber uma percussão que lhe conferiu velocidade inicial \vec{v}_0 , conforme ilustrado na Fig. 24. Sabendo que o coeficiente de atrito entre a partícula e a rampa é μ , escrever as equações do movimento da partícula.

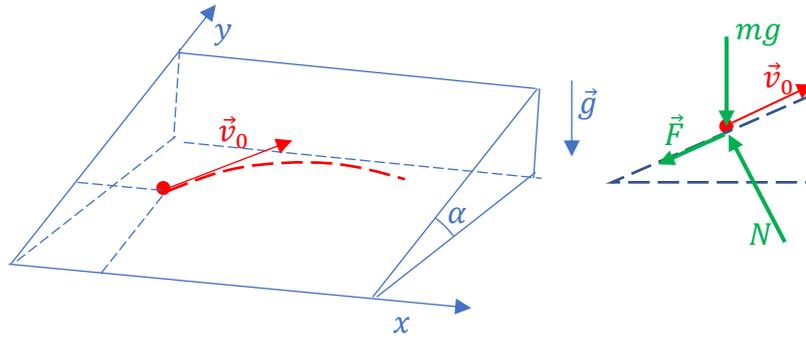


Figura 24. Partícula movendo-se sobre plano inclinado rugoso.

A magnitude da força de atrito \vec{F} é:

$$|\vec{F}| = \mu N = \mu mg \cos \alpha \quad (18 - 1)$$

O sistema em foco possui 2 graus de liberdade e x e y são coordenadas generalizadas adequadas para descrever sua configuração.

A energia cinética da partícula é:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (18 - 2)$$

A energia potencial da partícula é:

$$V = mgy \sin \alpha \quad (18 - 3)$$

As componentes x e y da força dissipativa agente na partícula são:

$$F_x = -|F| \cdot \frac{\dot{x}}{|\vec{v}|} = -\mu mg \cos \alpha \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (18 - 4)$$

$$F_y = -|F| \cdot \frac{\dot{y}}{|\vec{v}|} = -\mu mg \cos \alpha \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

O lagrangeano do sistema é:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \sin \alpha \quad (18 - 5)$$

Os demais termos que comparecem nas equações de Lagrange são indicados abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= m\ddot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -mg \sin \alpha \end{aligned} \quad (18 - 6)$$

Aplicando-se, finalmente, as equações de Lagrange, resultam

$$m\ddot{x} + \mu mg \cos \alpha \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0$$

$$m\ddot{y} + mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0$$
(18 – 7)

que são as equações diferenciais que governam o movimento da partícula.

19. Forças dissipativas viscosas e potencial dissipativo de Rayleigh

Consideremos um sistema material com m partículas P_i e n graus de liberdade, sujeito às ações de forças dissipativas viscosas \vec{F}_i , conforme ilustrado na Fig. 23.

O trabalho virtual realizado por essas forças, para um deslocamento virtual arbitrário $\delta\vec{P}$ é:

$$\delta\tau = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i \cdot \delta\vec{P}_i = - \sum_{i=1}^m c_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i)$$
(19 – 1)

Admitindo-se que o sistema esteja sujeito a n vínculos, que as coordenadas generalizadas sejam q_1, \dots, q_n e que se adotem deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos, tem-se:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n$$

$$\delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n} \delta q_n$$

$$\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n} \delta q_n$$
(19 – 2)

Notemos que as expressões acima podem ser escritas como

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j$$

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j$$

$$\delta z_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j$$
(19 – 3)

Substituindo-se 19-3 em 19-1 obtém-se:

$$\delta\tau = - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m c_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j$$
(19 – 4)

Notemos que a expressão acima pode ser escrita como:

$$\delta\tau = - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} c_i \left(\frac{\partial(\dot{x}_i^2)}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial(\dot{y}_i^2)}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial(\dot{z}_i^2)}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j$$
(19 – 5)

Neste ponto, definimos a função

$$R = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} c_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) \quad (19 - 6)$$

denominada função **potencial dissipativo de Rayleigh**.

Dessa forma, o trabalho virtual das forças dissipativas viscosas pode ser expresso como:

$$\delta\tau = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j \quad (19 - 7)$$

Por outro lado, já havíamos visto que esse mesmo trabalho virtual se expressa como:

$$\delta\tau = \sum_{j=1}^n F_{q_j} \cdot \delta q_j \quad (19 - 8)$$

Concluimos, portanto, que a componente F_{q_j} da força dissipativa viscosa generalizada é dada por:

$$F_{q_j} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \quad (19 - 9)$$

Supondo-se, agora que ajam sobre o sistema material forças conservativas e forças dissipativas viscosas, as equações de Lagrange para esse sistema adquirem a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (19 - 20)$$

Se, além dessas forças, também agirem outras forças generalizadas F_{q_j} que não se enquadrem na categoria das forças conservativas e das forças dissipativas viscosas, as equações de Lagrange adquirem a forma geral:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = F_{q_j} \quad (19 - 21)$$

20. Aplicações das equações de Lagrange na sua forma geral

Nos próximos dois exemplos, mostraremos como aplicar as equações de Lagrange a sistemas onde intervêm forças conservativas, forças dissipativas viscosas e demais forças.

20.1. Movimento autônomo de sistema composto por massas, molas e amortecedores

Na Fig. 25 apresenta-se um sistema composto por duas massas, três molas e três amortecedores. Deseja-se obter as equações diferenciais que governam esse sistema.

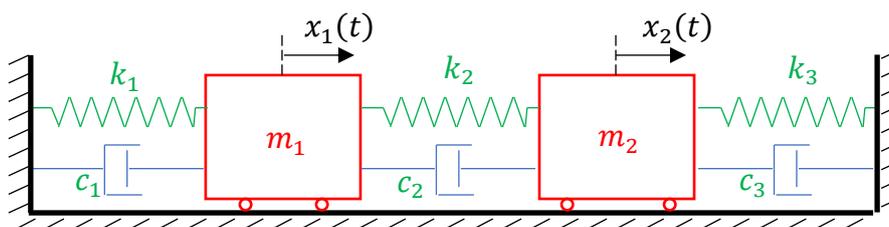


Figura 25. Sistema composto por massas, molas e amortecedores, sem excitação externa.

Como os blocos oscilam ao longo da direção horizontal apenas, o sistema possui 2 graus de liberdade. Adotaremos x_1 e x_2 como coordenadas generalizadas. Suporemos que ($x_1 = 0, x_2 = 0$) correspondam à configuração em que as 3 molas exibem seus comprimentos naturais. Aliás, sempre que tal situação se verifica, diz-se que as coordenadas em foco são **de equilíbrio**.

Feitas as considerações anteriores, calcularemos as funções energia cinética, energia potencial e potencial dissipativo de Rayleigh, ou seja:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) \\ V &= \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 x_3^2] \\ R &= \frac{1}{2} [c_1 \dot{x}_1^2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + c_3 \dot{x}_3^2] \end{aligned} \quad (20.1 - 1)$$

O lagrangeano do sistema é

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 x_2^2] \quad (20.1 - 2)$$

Os demais termos das equações de Lagrange são calculados a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \dot{x}_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) &= m_1 \ddot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} &= k_1 \dot{x}_1 - k_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m_2 \dot{x}_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) &= m_2 \ddot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} &= c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3 \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (20.1 - 3)$$

Substituindo-se 20.1-3 nas equações de Lagrange, obtêm-se as equações de movimento do sistema, ou seja:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (20.1 - 4)$$

20.2. Movimento forçado de um sistema composto por massas, molas e amortecedores

Determinar as equações do movimento do sistema material ilustrado na Fig.26, onde se destaca a ação de uma força senoidal excitando um dos blocos.

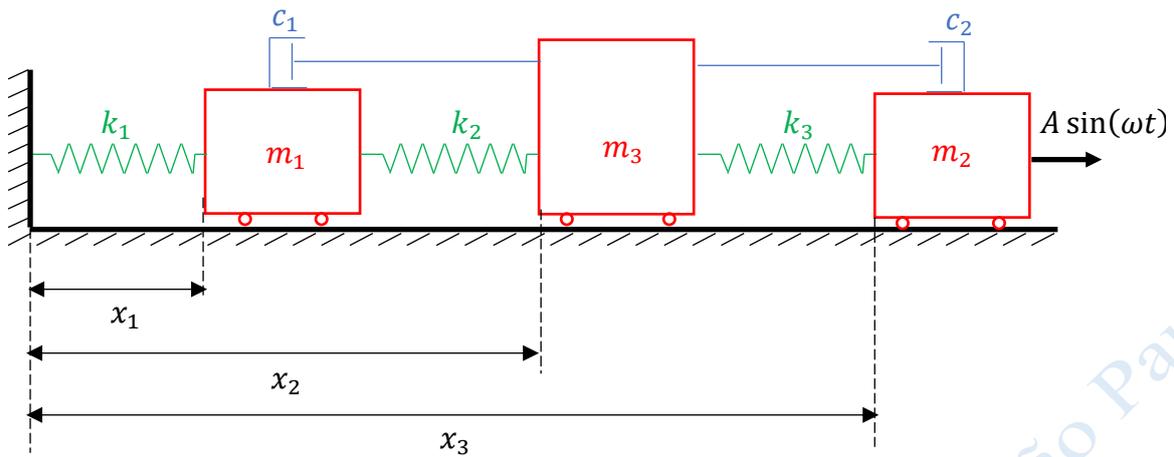


Figura 26. Sistema material composto por massas, molas e amortecedores, sujeito a excitação externa.

O sistema tem 3 graus de liberdade. Adotaremos x_1, x_2, x_3 como coordenadas generalizadas. As funções energia cinética, energia potencial e potencial dissipativo de Rayleigh são:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) \\
 V &= \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 (x_3 - x_1)^2 + k_3 (x_2 - x_3)^2] \\
 R &= \frac{1}{2} [c_1 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2]
 \end{aligned} \tag{20.2 - 1}$$

O lagrangeano do sistema é

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 (x_3 - x_1)^2 + k_3 (x_2 - x_3)^2] \tag{20.2 - 2}$$

Os termos das equações de Lagrange são determinados a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \dot{x}_1 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) &= m_1 \ddot{x}_1 \\
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -k_1 x_1 + k_2 (x_3 - x_1) \\
\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} &= -c_1 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m_2 \dot{x}_2 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) &= m_2 \ddot{x}_2 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= -k_3 (x_2 - x_3) \\
\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} &= c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} &= m_3 \dot{x}_3 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) &= m_3 \ddot{x}_3 \\
\frac{\partial L}{\partial x_3} &= -k_2 (x_3 - x_1) + k_3 (x_2 - x_3) \\
\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_3} &= c_1 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)
\end{aligned} \tag{20.2 - 3}$$

Notando que a componente F_{x_2} da força generalizada é

$$F_{x_2} = A \sin(\omega t) \tag{20.2 - 4}$$

e substituindo-se os termos 20.2-3 nas equações de Lagrange, obtêm-se as equações diferenciais que governam o sistema, ou seja:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_3 - x_1) - c_1 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1) &= 0 \\
m_2 \ddot{x}_2 + k_3 (x_2 - x_3) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) &= A \sin(\omega t) \\
m_3 \ddot{x}_3 + k_2 (x_3 - x_1) - k_3 (x_2 - x_3) + c_1 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) &= 0
\end{aligned} \tag{20.2 - 5}$$

21. Introdução às vibrações lineares

Neste tópico e nos seguintes, estudaremos o movimento de sistemas mecânicos em torno de suas configurações de equilíbrio estático.

Para que as oscilações desses sistemas possam ser descritas por equações diferenciais lineares e, por decorrência, tenham soluções analíticas harmônicas, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Os deslocamentos impostos a partir da configuração de equilíbrio estático são muito pequenos;
- As velocidades impostas ao sistema, em sua configuração de equilíbrio estático, são muito pequenas.

Nas Figs. 27a-b, apresentam-se dois sistemas mecânicos – um com 2 graus de liberdade, outro com 3. Esses sistemas, uma vez atendidas as condições *a* e *b* acima destacadas, apresentarão vibrações lineares harmônicas com 2 e 3 modos de vibrar, respectivamente.

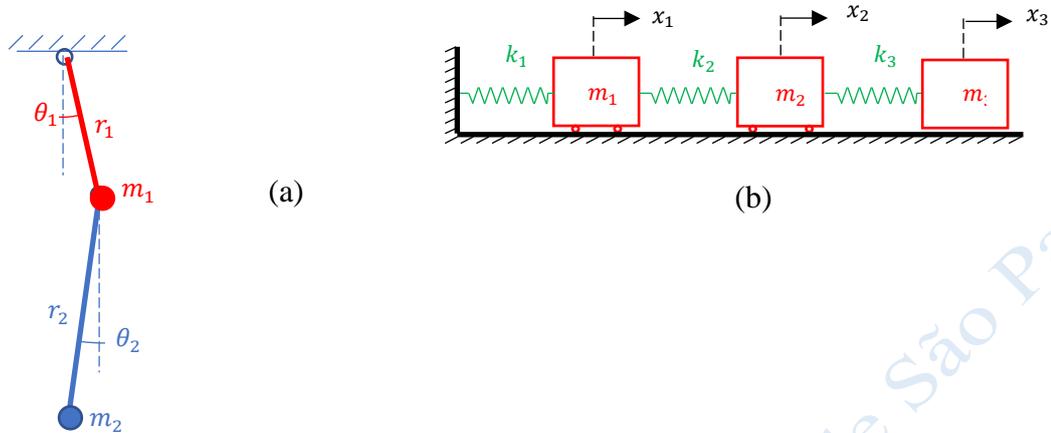


Figura 27. Sistemas mecânicos oscilando linearmente para

$$\theta_1 \cong 0, \dot{\theta}_1 \cong 0, \theta_2 \cong 0, \dot{\theta}_2 \cong 0, x_1 \cong 0, \dot{x}_1 \cong 0, x_2 \cong 0, \dot{x}_2 \cong 0, x_3 \cong 0, \dot{x}_3 \cong 0.$$

Demonstraremos, oportunamente, que a solução do sistema de equações diferenciais que governam o movimento do pêndulo duplo da Fig. 27-a, para pequenos valores de $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$, é da forma :

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (21 - 1)$$

Observe-se, nas equações acima, que ambas as hastes do pêndulo duplo realizam movimentos oscilatórios compostos por dois conjuntos de harmônicos – ω_1, φ_1 e ω_2, φ_2 , em que ω_1 e ω_2 são as frequências naturais do sistema e φ_1 e φ_2 as respectivas fases.

22. Método heurístico para linearizar equações diferenciais não lineares em torno da configuração de equilíbrio estático

Esse método simplesmente aplica as regras (a) e (b) destacadas no tópico 21. Além disso, caso compareçam nas equações diferenciais funções trigonométricas $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, adotam-se as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &\approx \varphi \\ \cos \varphi &\approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \end{aligned} \quad (22 - 1)$$

É importante enfatizar que essas aproximações são válidas apenas para valores de φ próximos de zero.

Para ilustrar esse método, examinaremos o problema do pêndulo duplo da Fig. 27a. As equações diferenciais que governam o seu movimento podem ser obtidas aplicando-se as equações de Lagrange e, em assim procedendo, chega-se ao seguinte sistema de equações diferenciais não-lineares:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2r_1r_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2r_1r_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)gr_1 \sin \theta_1 &= 0 \\ m_2r_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2r_1r_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2r_1r_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2gr_2 \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(22 - 2)$$

Aplicando-se as regras (a) e (b) do tópico 21, bem como as aproximações 22-1, obtêm-se:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2r_1r_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)gr_1\theta_1 &= 0 \\ m_2r_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2r_1r_2\ddot{\theta}_1 + m_2gr_2\theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (22 - 3)$$

É importante realçar o caráter linear das equações diferenciais 22-3 acima. Nelas, os coeficientes das derivadas de ordem 2, 1 e 0 são constantes, diferentemente do que se observa nas equações diferenciais 22-2, onde diversos desses coeficientes são funções não lineares.

23. Método para obter equações diferenciais lineares a partir das equações de Lagrange

Esse método tem como fundamento aproximar as funções energia cinética, energia potencial e potencial dissipativo de Rayleigh por funções quadráticas nas variáveis $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$. Essas aproximações, quando introduzidas nas equações de Lagrange, dão origem a equações diferenciais lineares, conforme será mostrado nos tópicos a seguir.

24. Expansão de uma função de n variáveis em séries de Taylor

Uma função f de uma única variável q_1 , ou seja, $f = f(q_1)$, pode ser aproximada nas vizinhanças do ponto $q_1 = q_1^0$, por uma série de Taylor, conforme indicado a seguir:

$$f(q_1) = f(q_1^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial q_1} \right|_{q_1^0} (q_1 - q_1^0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} \right|_{q_1^0} (q_1 - q_1^0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial q_1^3} \right|_{q_1^0} (q_1 - q_1^0)^3 + \dots \quad (24 - 1)$$

Caso a função f dependa de n variáveis q_1, \dots, q_n , sua expansão em séries de Taylor, em torno do ponto $\vec{q}^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ se expressa como:

$$\begin{aligned} f(\vec{q}) &= f(\vec{q}^0) + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial q_1} \right|_{\vec{q}^0} (q_1 - q_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial q_n} \right|_{\vec{q}^0} (q_n - q_n^0) \right] + \\ &\frac{1}{2!} \left[\left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_1} \right|_{\vec{q}^0} (q_1 - q_1^0)(q_1 - q_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_n} \right|_{\vec{q}^0} (q_1 - q_1^0)(q_n - q_n^0) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial q_1} \right|_{\vec{q}^0} (q_2 - q_2^0)(q_1 - q_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial q_n} \right|_{\vec{q}^0} (q_2 - q_2^0)(q_n - q_n^0) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_n \partial q_1} \right|_{\vec{q}^0} (q_n - q_n^0)(q_1 - q_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_n \partial q_n} \right|_{\vec{q}^0} (q_n - q_n^0)(q_n - q_n^0) \right] + \\ &\frac{1}{3!} \left[\left. \frac{\partial^3 f}{\partial q_1 \partial q_1 \partial q_1} \right|_{\vec{q}^0} (q_1 - q_1^0)(q_1 - q_1^0)(q_1 - q_1^0) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left. \frac{\partial^3 f}{\partial q_n \partial q_n \partial q_n} \right|_{\vec{q}^0} \right] + \\ &\quad + \dots + \end{aligned} \quad (24 - 2)$$

Analisando-se a expressão acima, notamos que a expansão de $f = f(\vec{q})$ por uma série de Taylor, em torno do ponto \vec{q}^0 é dada por:

$$\begin{aligned}
f(\vec{q}) &= f(\vec{q}^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial q_i} \right|_{\vec{q}^0} (q_i - q_i^0) + \\
&+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0) + \\
&+ \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^3 f}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right|_{\vec{q}^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)(q_k - q_k^0) + \\
&\dots
\end{aligned} \tag{24 - 3}$$

É importante ainda observar que, se q_1, \dots, q_n são coordenadas de equilíbrio, medidas a partir da configuração de equilíbrio estático do sistema, a expansão de $f(\vec{q})$ deve ser feita em torno do ponto $\vec{q}^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) = (0, \dots, 0) = \vec{0}$.

Utilizaremos a abordagem exposta neste tópico para expandir as funções T, V, R em torno da posição de equilíbrio estático do sistema.

25. Expansão aproximada da energia cinética descrita em coordenadas de equilíbrio

Consideremos um sistema material com m partículas P_i de massas m_i , situadas nas posições (x_i, y_i, z_i) . Admitiremos que essas partículas estejam sujeitas a n vínculos holônomos, de modo que suas coordenadas cartesianas possam ser expressas como funções das coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n , ou seja:

$$\begin{aligned}
x_i &= x_i(q_1, \dots, q_n) \\
y_i &= y_i(q_1, \dots, q_n) \\
z_i &= z_i(q_1, \dots, q_n)
\end{aligned} \tag{25 - 1}$$

Expandindo-se as funções x_i (e o mesmo vale para y_i e z_i) em torno da configuração de equilíbrio $x_i(\vec{0})$, resulta:

$$x_i(\vec{q}) = x_i(\vec{0}) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}} (q_j - q_j^0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{\vec{0}} (q_j - q_j^0)(q_k - q_k^0) + \dots \tag{25 - 2}$$

Como $q_j^0 = q_k^0 = 0, \forall j, k$, a expressão anterior se transforma em:

$$x_i(\vec{q}) = x_i(\vec{0}) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{\vec{0}} q_j q_k + \dots \tag{25 - 3}$$

Admitindo-se que os deslocamentos q_j bem como as velocidades generalizadas \dot{q}_j sejam muito pequenos, de modo que se possam ignorar os produtos $q_j \dot{q}_k$ (deve-se observar que, na expressão da energia cinética, esses produtos seriam ainda elevados ao quadrado), as velocidades \dot{x}_i podem ser aproximadas por:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \dot{q}_j \tag{25 - 4}$$

onde $\alpha_{ij} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}}$

Naturalmente, \dot{y}_i e \dot{z}_i são aproximadas por funções similares, da forma:

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \dot{q}_j \quad (25 - 5)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \dot{q}_j$$

onde $\beta_{ij} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}}$ e $\gamma_{ij} = \left. \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}}$

Elevando-se ao quadrado o termo \dot{x}_i , obtém-se:

$$\dot{x}_i^2 = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \dot{q}_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \dot{q}_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \dot{q}_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{ij} \alpha_{ik} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (25 - 6)$$

A energia cinética do sistema material, dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (25 - 7)$$

pode, portanto, ser aproximada por:

$$T \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m m_i (\alpha_{ij} \alpha_{ik} + \beta_{ij} \beta_{ik} + \gamma_{ij} \gamma_{ik}) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (25 - 8)$$

A expressão anterior pode ser representada como:

$$T \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (25 - 9)$$

onde

$$a_{jk} = a_{kj} = \sum_{i=1}^m m_i (\alpha_{ij} \alpha_{ik} + \beta_{ij} \beta_{ik} + \gamma_{ij} \gamma_{ik}) \quad (25 - 10)$$

Como todos os valores de a_{jk} são constantes, vê-se que a aproximação 25-9 é uma função quadrática das velocidades generalizadas.

26. Expressão aproximada do potencial dissipativo de Rayleigh

Consideremos um sistema material com m partículas P_i , sujeitas a n vínculos holônomos. Admitamos que essas partículas sofram a ação de forças viscosas e que c_i sejam os coeficientes de atrito viscoso associados a P_i . Nessas condições, o potencial dissipativo de Rayleigh é dado por:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (26 - 1)$$

Notando-se a similaridade algébrica entre 26-1 e 25-7 (expressão da energia cinética de um sistema material com m partículas), concluímos que a mera substituição formal $m_i \rightarrow c_i$ é suficiente para que se obtenha a expressão aproximada da função potencial dissipativo de Rayleigh, ou seja:

$$R \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (26 - 2)$$

onde

$$b_{jk} = \sum_{i=1}^m c_i (\alpha_j \alpha_k + \beta_j \beta_k + \gamma_j \gamma_k) \quad (26 - 3)$$

27. Expressão aproximada da energia potencial

Como V depende apenas das posições das partículas materiais, sua expansão em séries de Taylor, em torno da configuração de equilíbrio estático, é dada por:

$$V = V(\vec{0}) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{\vec{0}} q_j q_k + \dots \quad (27 - 1)$$

Notemos que

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{\vec{0}} = 0, \forall j \quad (27 - 2)$$

pois $\vec{0}$ corresponde à configuração de equilíbrio estático (ponto de mínimo da função energia potencial). Além disso, $V(\vec{0})$ é uma constante arbitrária e de todo irrelevante. Dessa forma, chega-se à seguinte expressão aproximada de V :

$$V \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} q_j q_k \quad (27 - 3)$$

onde

$$c_{jk} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{\vec{0}} \quad (27 - 4)$$

28. Exemplo de cálculo das expressões aproximadas de T, R, V

Utilizaremos as aproximações apresentadas nos três tópicos anteriores para obter formas quadráticas das funções energia cinética, energia potencial e potencial dissipativo de Rayleigh, tomando como referência o modelo do pêndulo duplo plano (Fig. 28).

Adotando-se θ e φ como coordenadas generalizadas, as equações vinculares são:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + r_1 \sin \theta \\ y_1 &= y_0 - r_1 \cos \theta \\ x_2 &= x_0 + r_1 \sin \theta + r_2 \sin \varphi \\ y_2 &= y_0 - r_1 \cos \theta - r_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (28 - 1)$$

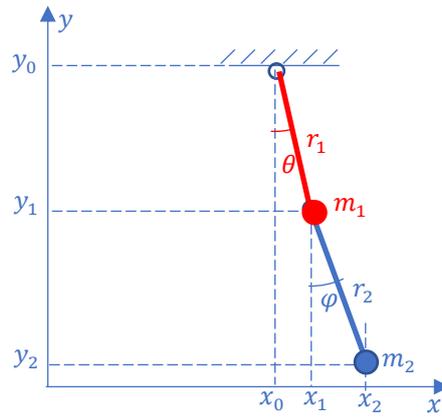


Figura 28. Pêndulo duplo plano.

A expressão exata da energia cinética desse sistema é:

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)] \quad (28 - 2)$$

e sua forma quadrática aproximada é:

$$T \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (28 - 3)$$

onde

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^2 m_i (\alpha_j \alpha_k + \beta_j \beta_k + \gamma_j \gamma_k) \quad (28 - 4)$$

e

$$\alpha_{ij} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right|_{(0,0)} \quad \beta_{ij} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \right|_{(0,0)} \quad \gamma_{ij} = \left. \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right|_{(0,0)} \quad (28 - 5)$$

Assim, tem-se:

$$a_{jk} = m_1 \left(\left. \frac{\partial x_1}{\partial q_j} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial y_1}{\partial q_j} \frac{\partial y_1}{\partial q_k} \right) \right|_{\vec{0}} + m_2 \left(\left. \frac{\partial x_2}{\partial q_j} \frac{\partial x_2}{\partial q_k} + \frac{\partial y_2}{\partial q_j} \frac{\partial y_2}{\partial q_k} \right) \right|_{\vec{0}} \quad (28 - 6)$$

Portanto, a expressão aproximada da energia cinética é:

$$\begin{aligned} T \cong & \frac{1}{2} \left\{ m_1 \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial q_1} \right)^2 \right] \right|_{\vec{0}} + m_2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial q_1} \right)^2 \right] \right|_{\vec{0}} \right\} \dot{q}_1^2 + \\ & \frac{1}{2} \left\{ 2m_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + \frac{\partial y_1}{\partial q_1} \frac{\partial y_1}{\partial q_2} \right) \right|_{\vec{0}} + 2m_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} + \frac{\partial y_2}{\partial q_1} \frac{\partial y_2}{\partial q_2} \right) \right|_{\vec{0}} \right\} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & \frac{1}{2} \left\{ m_1 \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial q_2} \right)^2 \right] \right|_{\vec{0}} + m_2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial q_2} \right)^2 \right] \right|_{\vec{0}} \right\} \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (28 - 7)$$

Fazendo-se $q_1 = \theta$ $q_2 = \varphi$, as derivadas parciais que compõem na expressão acima são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = r_1 \cos \theta \Rightarrow \left. \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right|_{\vec{0}} = r_1 \\
\frac{\partial x_1}{\partial q_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = 0 \\
\frac{\partial y_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial y_1}{\partial \theta} = r_1 \sin \theta \Rightarrow \left. \frac{\partial y_1}{\partial q_1} \right|_{\vec{0}} = 0 \\
\frac{\partial y_1}{\partial q_2} &= \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = 0 \\
\frac{\partial x_2}{\partial q_1} &= \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = r_1 \cos \theta \Rightarrow \left. \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \right|_{\vec{0}} = r_1 \\
\frac{\partial x_2}{\partial q_2} &= \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = r_2 \cos \varphi \Rightarrow \left. \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \right|_{\vec{0}} = r_2 \\
\frac{\partial y_2}{\partial q_1} &= \frac{\partial y_2}{\partial \theta} = r_1 \sin \theta \Rightarrow \left. \frac{\partial y_2}{\partial q_1} \right|_{\vec{0}} = 0 \\
\frac{\partial y_2}{\partial q_2} &= \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = r_2 \sin \varphi \Rightarrow \left. \frac{\partial y_2}{\partial q_2} \right|_{\vec{0}} = 0
\end{aligned} \tag{28-8}$$

Substituindo-se 28-8 em 28-7, resulta:

$$T \cong \frac{1}{2} [(m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta}^2 + 2m_2r_1r_2\dot{\theta}\dot{\varphi} + m_2r_2^2\dot{\varphi}^2] \tag{28-9}$$

A expressão quadrática aproximada da energia potencial é dada por:

$$V \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 c_{jk} q_j q_k \tag{28-10}$$

onde

$$c_{jk} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{\vec{0}} \tag{28-11}$$

Portanto, tem-se:

$$V \cong \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2) \tag{28-12}$$

onde

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} [(m_1 + m_2)gr_1 \sin \theta] \Big|_{\vec{0}} = (m_1 + m_2)gr_1 \cos \theta \Big|_{\vec{0}} = (m_1 + m_2)gr_1 \\
c_{12} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(m_1 + m_2)gr_1 \sin \theta] \Big|_{\vec{0}} = 0 \\
c_{22} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [m_2gr_2 \sin \varphi] \Big|_{\vec{0}} = m_2gr_2 \cos \varphi \Big|_{\vec{0}} = m_2gr_2
\end{aligned} \tag{28-13}$$

Assim, resulta:

$$V \cong \frac{1}{2} [(m_1 + m_2)gr_1\theta^2 + m_2gr_2\varphi^2] \tag{28-14}$$

Aplicaremos agora as equações de Lagrange ao sistema, adotando as expressões quadráticas aproximadas de T e V . Para tanto, calculamos o lagrangeano

$$L \cong \frac{1}{2} [(m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta}^2 + 2m_2r_1r_2\dot{\theta}\dot{\varphi}] - \frac{1}{2} [(m_1 + m_2)gr_1\theta^2 + m_2gr_2\varphi^2] \quad (28 - 15)$$

e as derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta} + m_2r_1r_2\dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta} + m_2r_1r_2\ddot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -(m_1 + m_2)gr_1\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2r_1r_2\dot{\theta} + m_2r_2^2\dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= m_2r_1r_2\ddot{\theta} + m_2r_2^2\ddot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2gr_2\varphi \end{aligned} \quad (28 - 16)$$

Aplicando-se, finalmente, as equações de Lagrange, chega-se ao seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta} + m_2r_1r_2\ddot{\varphi} + (m_1 + m_2)gr_1\theta &= 0 \\ m_2r_1r_2\ddot{\theta} + m_2r_2^2\ddot{\varphi} + m_2gr_2\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (28 - 17)$$

Notamos que o sistema de equações diferenciais obtido a partir das aproximações quadráticas das funções T e V é linear, ou seja, nessas equações não aparecem expressões não lineares envolvendo $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$.

29. Equações de Lagrange aplicadas a formas quadráticas de T, V e R

Introduzindo-se nas equações de Lagrange as funções aproximadas de T, V e R , ou seja:

$$T \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (29 - 1)$$

$$R \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (29 - 2)$$

$$V \cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} q_j q_k \quad (29 - 3)$$

obtem-se um sistema de equações lineares de coeficientes constantes.

Mostraremos a seguir que a afirmação anterior é verdadeira, para o quê consideraremos um sistema mecânico com $n = 3$ graus de liberdade. Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned}
T &\cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + a_{22} \dot{q}_2^2 + a_{33} \dot{q}_3^2) \\
R &\cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2b_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2b_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + b_{22} \dot{q}_2^2 + b_{33} \dot{q}_3^2) \\
V &\cong \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 c_{jk} q_j q_k = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + 2c_{13} q_1 q_3 + 2c_{23} q_2 q_3 + c_{22} q_2^2 + c_{33} q_3^2)
\end{aligned}
\tag{29-4}$$

Os termos das equações de Lagrange são calculados a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + a_{13} \dot{q}_3 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) &= a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + a_{13} \ddot{q}_3 \\
\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} &= b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + b_{13} \dot{q}_3 \\
\frac{\partial L}{\partial q_1} &= -c_{11} q_1 - c_{12} q_2 - c_{13} q_3
\end{aligned}
\tag{29-5}$$

Substituindo-se esses termos na equação de Lagrange, resulta:

$$a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + a_{13} \ddot{q}_3 + b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + b_{13} \dot{q}_3 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 + c_{13} q_3 = 0 \tag{29-6}$$

Estendendo o resultado anterior para um sistema com n graus de liberdade, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{29-7}$$

As matrizes $[A]$, $[B]$, $[C]$, quadradas e simétricas, são denominadas, respectivamente, de **matriz de massa**, **matriz de dissipação** e **matriz de rigidez**. Dessa forma, o sistema de equações diferenciais lineares 29-7 pode ser representado como:

$$[A][\ddot{q}] + [B][\dot{q}] + [C][q] = [0] \tag{29-8}$$

As equações diferenciais acima descrevem as vibrações lineares realizadas por um sistema mecânico autônomo (não excitado por forças externas) com n graus de liberdade.

Caso as forças dissipativas sejam desprezíveis, tem-se

$$[A][\ddot{q}] + [C][q] = [0] \tag{29-9}$$

e o sistema exibirá vibrações harmônicas não amortecidas tendo, como autofunções,

$$\begin{aligned}
q_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\
&\vdots \\
q_n &= A_n \cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
\tag{29-10}$$

Derivando-se 29-10 duas vezes, resulta :

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= -\omega^2 A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\
&\vdots \\
\ddot{q}_n &= -\omega^2 A_n \cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
\tag{29-11}$$

Introduzindo-se 29-10 e 29-11 em 29-9, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11}\omega^2 - c_{11} & \cdots & a_{1n}\omega^2 - c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}\omega^2 - c_{n1} & \cdots & a_{nn}\omega^2 - c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29 - 12)$$

Para que o sistema de equações lineares homogêneas 29-12 tenha solução diferente da trivial, deve-se impor:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\omega^2 - c_{11} & \cdots & a_{1n}\omega^2 - c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}\omega^2 - c_{n1} & \cdots & a_{nn}\omega^2 - c_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (29 - 13)$$

A equação anterior é uma equação polinomial algébrica de grau n , cujas raízes são as frequências naturais $\omega_1, \dots, \omega_n$ do sistema. Uma vez determinadas essas raízes, sua substituição, uma a uma, no sistema de equações lineares homogêneas 29-12, fornece, a menos de um fator de escala irrelevante, as amplitudes A_1, \dots, A_n das vibrações harmônicas correspondentes. O conjunto dessas amplitudes, para uma dada frequência natural ω_i , caracteriza o $i^{\text{ésimo}}$ modo de vibrar do sistema.

30. Exemplo de aplicação do método de geração de equações diferenciais lineares de um sistema

Na Fig. 29, apresenta-se um sistema mecânico constituído por 2 pêndulos simples de mesmo comprimento ℓ e massa m , interconectados entre si por uma mola de constante elástica k . Admitindo-se que, na configuração de equilíbrio do sistema a mola exiba seu comprimento natural, determinar as equações diferenciais que governam o movimento do sistema, supondo pequenas oscilações.

Adotando θ_1 e θ_2 como coordenadas generalizadas, as equações vinculares se escrevem como:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell \cos \theta_1 \\ y_1 &= \ell \sin \theta_1 \\ x_2 &= \ell \cos \theta_2 \\ y_2 &= b + \ell \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (30 - 1)$$

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (30 - 2)$$

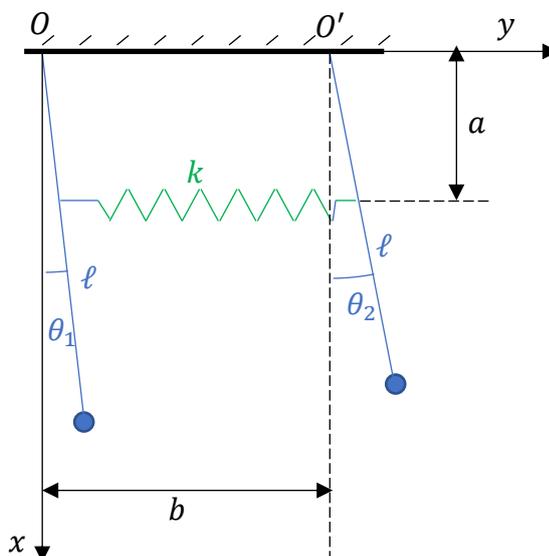


Figura 29. Pêndulos conectados por mola.

A energia potencial do sistema é:

$$V = \frac{1}{2}ka^2(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 - mg\ell(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (30 - 3)$$

Notando que a expressão de V é não linear e não quadrática, utilizaremos o procedimento apresentado no tópico 27 para aproximá-la por uma forma quadrática. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = ka^2(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \cos \theta_1 + mg\ell \sin \theta_1 \quad (30 - 4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} = ka^2(\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) + ka^2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + mg\ell \cos \theta_1 \quad (30 - 5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \right|_{\theta_1=\theta_2=0} = ka^2(1 - 0) + ka^2 \sin 0 \sin 0 + mg\ell \cos 0 = ka^2 + mg\ell \quad (30 - 6)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = -ka^2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \quad (30 - 7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right|_{\theta_1=\theta_2=0} = -ka^2 \quad (30 - 8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = ka^2(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)(\cos \theta_2) + mg\ell \sin \theta_2 \quad (30 - 9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = ka^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + ka^2(\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) + mg\ell \cos \theta_2 \quad (30 - 10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} \right|_{\theta_1=\theta_2=0} = ka^2 0 \cdot 0 + ka^2(1 - 0) + mg\ell = ka^2 + mg\ell \quad (30 - 11)$$

Portanto, a expressão quadrática aproximada da energia potencial é:

$$V \cong \frac{1}{2}[(ka^2 + mg\ell)\theta_1^2 - 2ka^2\theta_1\theta_2 + (ka^2 + mg\ell)\theta_2^2] \quad (30 - 12)$$

Desprezando-se o termo constante da expressão aproximada de V , chega-se a:

$$V \cong \frac{1}{2}[ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + mg\ell(\theta_1^2 + \theta_2^2)] \quad (30 - 13)$$

Poderíamos ter chegado ao resultado anterior fazendo a substituição direta de expressões aproximadas das funções seno e cosseno na expressão exata da energia potencial (30-3). Tomando-se, portanto,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots \cong \theta \\ \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots \cong 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \end{aligned} \quad (30 - 14)$$

e substituindo-se em 30-3, resulta:

$$\begin{aligned} V &\cong \frac{1}{2}ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - mg\ell \left(1 - \frac{1}{2}\theta_1^2 + 1 - \frac{1}{2}\theta_1^2\right) \\ \Rightarrow V &\cong \frac{1}{2}[ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + mg\ell(\theta_1^2 + \theta_2^2)] - 2mg\ell \end{aligned} \quad (30 - 15)$$

Vê-se, portanto, que as expressões 30-15 e 30-13 são iguais, a menos de uma constante de todo irrelevante.

Tomando-se as funções T e V dadas, respectivamente, por 30-2 e 30-13, o lagrangeano do sistema e os termos das equações de Lagrange são:

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2} [k a^2 (\theta_1 - \theta_2)^2 + m g \ell (\theta_1^2 + \theta_2^2)] \quad (30 - 16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m \ell^2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m \ell^2 \ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -k a^2 (\theta_2 - \theta_1) - m g \ell \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m \ell^2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m \ell^2 \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = k a^2 (\theta_1 - \theta_2) - m g \ell \theta_2$$

(30 - 17)

Assim, resultam as seguintes equações diferenciais lineares, válidas para o caso de o sistema realizar pequenas oscilações:

$$m \ell^2 \ddot{\theta}_1 + k a^2 (\theta_1 - \theta_2) + m g \ell \theta_1 = 0$$

$$m \ell^2 \ddot{\theta}_2 - k a^2 (\theta_1 - \theta_2) + m g \ell \theta_2 = 0$$

(30 - 18)

Bibliografia

- [1] Appell, P., *Traité de Mécanique Rationnelle*, Tome II. Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [2] Béghin, H., *Cours de Mécanique Théorique et Appliquée*, Tome I. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [3] Béghin, H., *Exercices de Mécanique*. Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- [4] França, L.N.F., Matsumura, A.Z., *Mecânica Geral*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2004.
- [5] Pars, L.A., *A Treatise on Analytical Dynamics*. Heineman, London, 1965;
- [6] Pérès, J., *Mécanique Général*. Masson et C^{ie}, Éditeurs, Paris, 1962.
- [7] Platrier, C., *Mécanique Rationnelle*, Tome I. Dunot, Paris, 1954.
- [8] Wells, D.A., *Lagrangian Dynamics*, 1st ed. Mc-Graw Hill, 1967.