Sobre funções de três variáveis

Uma função de três variáveis é indicada por

$$f : G \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longrightarrow w = f(x, y, z)$$

O domínio de uma tal função é um subconjunto G do espaç $\mathbb{R}^3$.

O gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \in G \text{ e } w = f(x, y, z)\} = \{(x, y, z, f(x, y, z)) : (x, y, z) \in G\}$$

Agora não é possível desenhar o gráfico de f, mas temos o recurso das chamadas superfícies de nível.

Definição: Considere a função $w = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, e $c \in \mathbb{R}$. A superfície de nível c da função f é definida por

$$S_c = \{(x, y, z) \in G : f(x, y, z) = c\}$$

Exemplo: Considere a função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$.
Determine o domínio G de f e a sua superfície de nível 7.

Temos que $(x, y, z) \in G \longleftrightarrow \; x^2 + y^2 + y^2 \geq \; 1$

A superfície de nível 7 é dada por $f(x, y, z) = 7$, e portanto, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} = 7$, e obtemos $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 49$, e $x^2 + y^2 + z^2 = 50$: a superfície de nível 7 é a esfera de centro na origem e raio $\sqrt{50}$.

Definição: Seja $w = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, e $(x_0, y_0, z_0) \in G$.

(i) Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0, z_0) se $\lim\limits_{(x,y,z) \longrightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$, isto é: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| < \delta \; \rightarrow \; |f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| < \epsilon$.
f é contínua se é contínua em todos os pontos de seu domínio.

(ii) As derivadas parciais de f no ponto (x_0, y_0, z_0) são definidas por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{k \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0, y_0, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0)}{l} \end{cases}$$

(iii) f é diferenciável em (x_0, y_0, z_0) se existem $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) - \alpha(x-x_0) - \beta(y-y_0) - \delta(z-z_0)}{\|(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\|} = 0$$

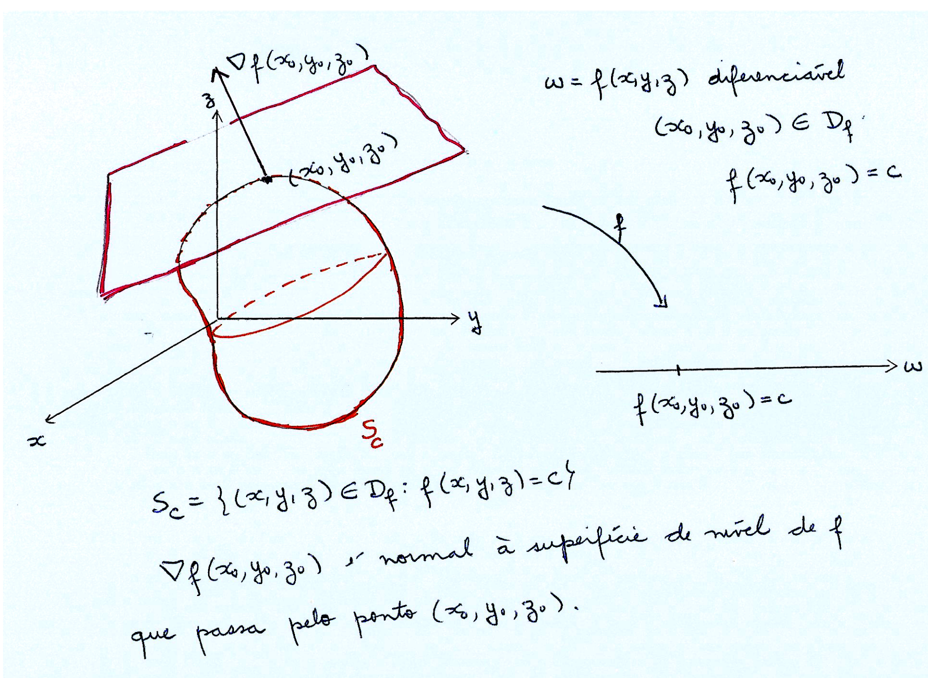
Pode-se demonstrar que, neste caso, os valores de α, β, δ são as derivadas parciais de f no ponto (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \\ \beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \\ \delta = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$$

Definição: Seja $w = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in G$, uma função diferenciável.
O gradiente de f num ponto (x,y,z) de seu domínio é definido por

$$\bigtriangledown f(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z))$$

Proposição: Seja $w = f(x,y,z)$ uma função diferenciável e (x_0,y_0,z_0) um ponto de seu domínio. Se $f(x_0,y_0,z_0) = c$ então o vetor
$\bigtriangledown f(x_0,y_0,z_0)$ é perpendicular à superfície de nível c, isto é, é perpendicular ao plano tangente à superfície de nível de f que passa pelo ponto (x_0,y_0,z_0).



Exemplo: Determine o plano tangente ao elipsóide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = 3$ no ponto $(3, 2, 6)$.

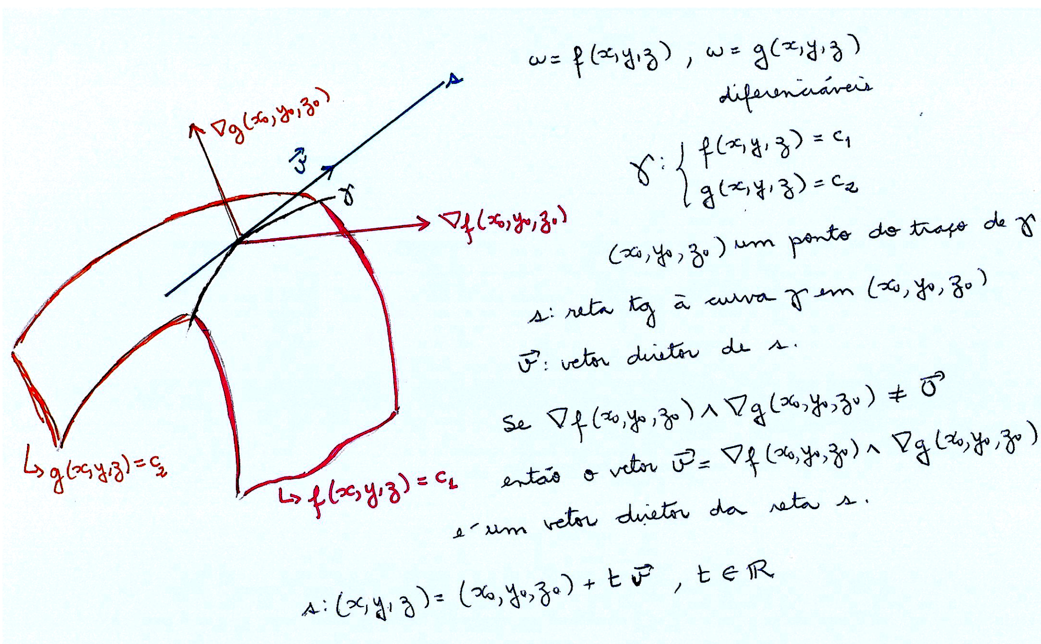
Considere a função $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36}$. Então o elipsóide dado é superfície de nível 3 da função f. Pela proposição anterior, vale que $\bigtriangledown f(3,2,6)$ é vetor normal ao plano tangente procurado. Por sua vez,

$\bigtriangledown f(x,y,z) = (\frac{2x}{9}, \frac{2y}{4}, \frac{2z}{36})$, de maneira que $\bigtriangledown f(3,2,6) = (\frac{6}{9}, \frac{4}{4}, \frac{12}{36})$ que, por sua vez, é paralelo ao vetor $(6,9,3)$. Como o plano tangente passa pelo ponto $(3,2,6)$, pode ser determinado pela equação $6(x-3)+9(y-2)+3(z-6)=0$.

Proposição: Sejam $f(x.y.z)$ e $g(x,y,z)$ funções diferenciáveis, e considere a curva γ definida pelas equações

$$\begin{cases} f(x,y,z) = c_1 \\ g(x,y,z) = c_2 \end{cases}$$

isto é, a curva γ é interseção de duas superfícies de nível de f e g, respectivamente. Dado (x_0,y_0,z_0) um ponto do traço de γ, se o vetor $\vec{v} = \bigtriangledown f(x_0,y_0,z_0) \wedge \bigtriangledown g(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$ então $\vec{v}$ é tangente à curva γ no ponto (x_0,y_0,z_0).



Exemplo: Determine a reta tangente à curva γ dada por interseção do elipsóide $x^2+y^2+3z^2=5$ e o cilindro $4x^2+3y^2=7$ no ponto $(1,-1,1)$.

Temos que:

$x^2+y^2+3z^2=5$ é superfície de nível 5 da função $f(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2$.

$4x^2+3y^2=7$ é superfície de nível 7 da função $g(x,y,z)=4x^2+3y^2$.

Então um vetor diretor $\vec{v}$ para a reta procurada pode ser obtido como

$\vec{v} = \bigtriangledown f(1,-1,1) \wedge \bigtriangledown g(1,-1,1)$

Vamos às contas: $\bigtriangledown f(x,y,z) = (2x,2y,6z) \rightarrow \bigtriangledown f(1,-1,1) = (2,-2,6)$

$\bigtriangledown g(x,y,z) = (8x, 6y, 0) \rightarrow \quad \bigtriangledown f(1,-1,1) = (8,-6,0)$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{vmatrix} \quad = \quad (36, 48, 4).$$

Portanto, a reta tangente à curva no ponto considerado tem equação

$$(x,y,z) = (1,-1,1) + t(36,48,4), \quad t \in \mathbb{R}.$$