



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PQI 3202 Fenômenos de Transporte I

Ardson dos Santos Vianna Júnior - ASVJ

e-mail: ardson@usp.br





ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Aula 30 – Balanço de forças

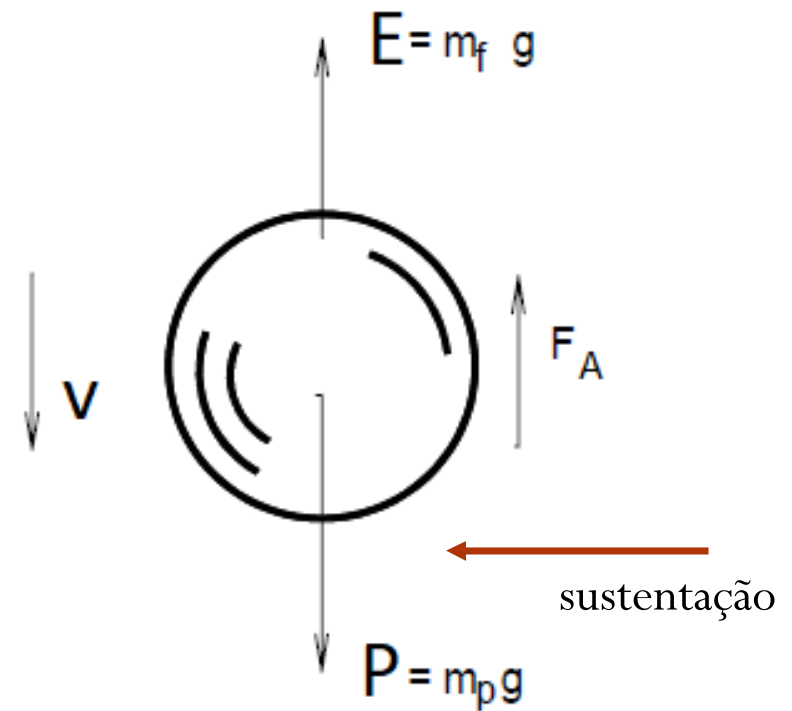
PQI 3202 Fenômenos de Transporte I

1 Planejamento

1. Introdução
2. Balanço de forças
 1. Sedimentação
 2. Fluidização
 3. Elutriação
3. Conclusão

2 Balanço de forças

- Peso: $P = m_{\text{sol}} g$
- Empuxo: $E = m_{\text{liq}} g$
- Arraste: $F_A = -\frac{3}{4} \cdot C_D v^2 \rho \cdot A_P$
- Força resultante?



(sustentação – ligação com o Munson *et al.*)

9.1.1 Arrasto e Sustentação

Quando um corpo se move através de um fluido, há uma interação entre o corpo e o fluido. Esta interação pode ser descrita por forças que atuam na interface fluido-corpo. Estas forças, por sua vez, podem ser escritas em função da tensão de cisalhamento na parede, τ_p , provocada por efeitos viscosos, e da tensão normal que é devida à pressão, p . As Figs. 9.3a e 9.3b mostram distribuições de pressão e tensão de cisalhamento típicas.

Sempre é interessante conhecer as distribuições de pressão e de tensão de cisalhamento na superfície do corpo (mesmo que seja difícil de obter esta informação). Entretanto, na maioria das vezes, apenas os efeitos globais destas tensões são necessários para resolver os nossos problemas. A componente da força resultante que atua na direção do escoamento é denominada arrasto ("drag"), e a que atua na direção normal ao escoamento é denominada sustentação, L ("lift"). Na Fig. 9.3c, nós também detectamos, em alguns corpos tridimensionais, uma força perpendicular ao plano que contém D e L .

O arrasto e a sustentação podem ser obtidos pela integração das tensões de cisalhamento e das pressões normais ao corpo que está sendo considerado (veja a Fig. 9.4). Os componentes x e y da força atuam num pequeno elemento de área dA são:

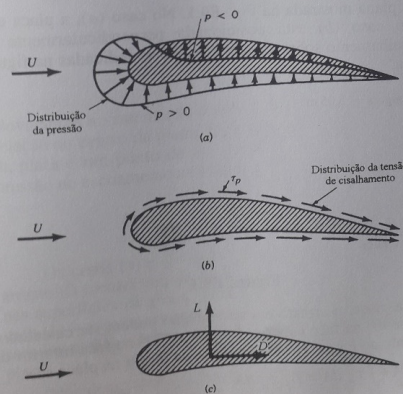


Figura 9.3 Forças num objeto bidimensional submerso: (a) força de pressão, (b) força viscosa e (c) força resultante (arrasto e sustentação).

$$dF_x = (p dA) \cos \theta + (\tau_p dA) \sin \theta$$

$$dF_y = -(p dA) \sin \theta + (\tau_p dA) \cos \theta$$

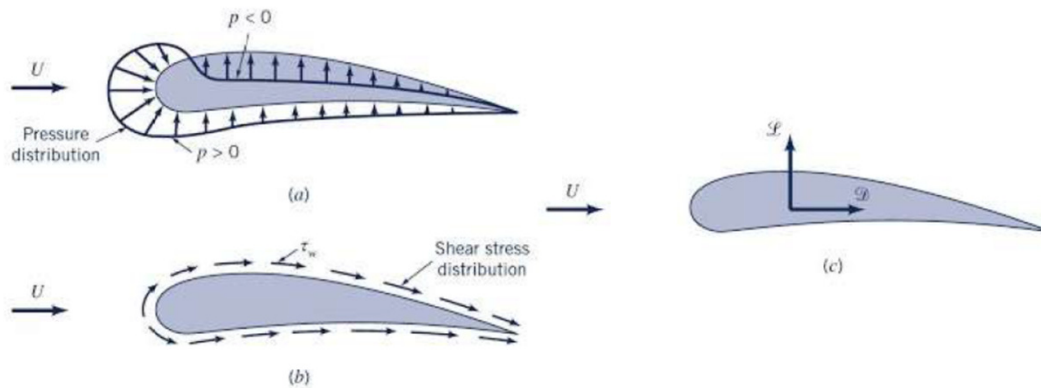
Assim, os módulos das forças D e L que atuam no objeto são

$$D = \int dF_x = \int p \cos \theta dA + \int \tau_p \sin \theta dA$$

$$L = \int dF_y = -\int p \sin \theta dA + \int \tau_p \cos \theta dA$$

(sustentação – ligação com o Munson *et al.*)

- Pressão e superfície
- Lift (Sustentação) e Drag (arraste)



■ **Figure 9.3** Forces from the surrounding fluid on a two-dimensional object: (a) pressure force, (b) viscous force, and (c) resultant force (lift and drag).

$$\mathcal{D} = \int dF_x = \int p \cos \theta dA + \int \tau_w \sin \theta dA$$

$$\mathcal{L} = \int dF_y = - \int p \sin \theta dA + \int \tau_w \cos \theta dA$$

2.1 Sedimentação

$$F_R = P - E - F_A$$

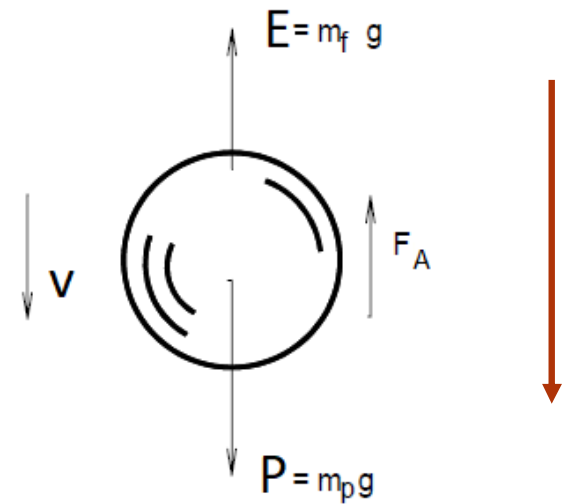
$$m_{sol} \cdot \frac{dv}{dt} = m_{sol} \cdot g - m_{liq} \cdot g - \frac{3}{4} \cdot C_D v^2 \rho \cdot A_P$$

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{(\rho_{sol} - \rho)}{\rho_{sol}} - \frac{3}{4} \cdot C_D v^2 \rho \cdot A_P \frac{1}{m}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\frac{\rho}{m} = \frac{1}{V}$$

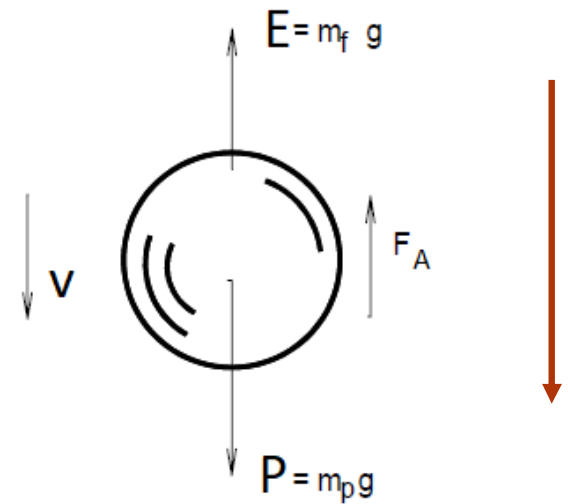
$$\frac{A_P}{V} = D_P$$



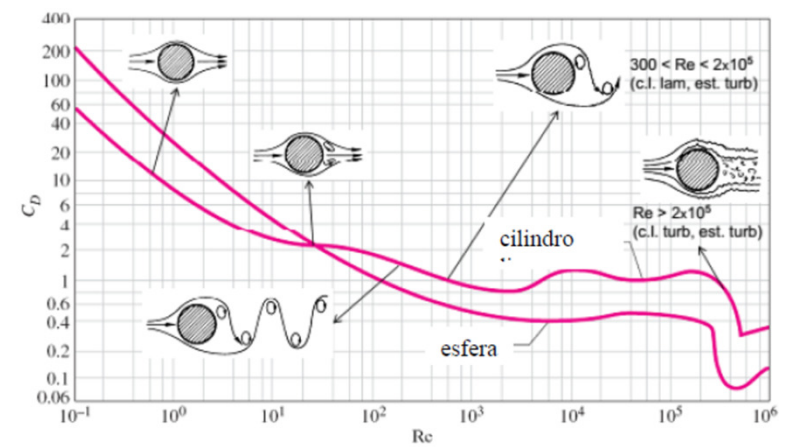
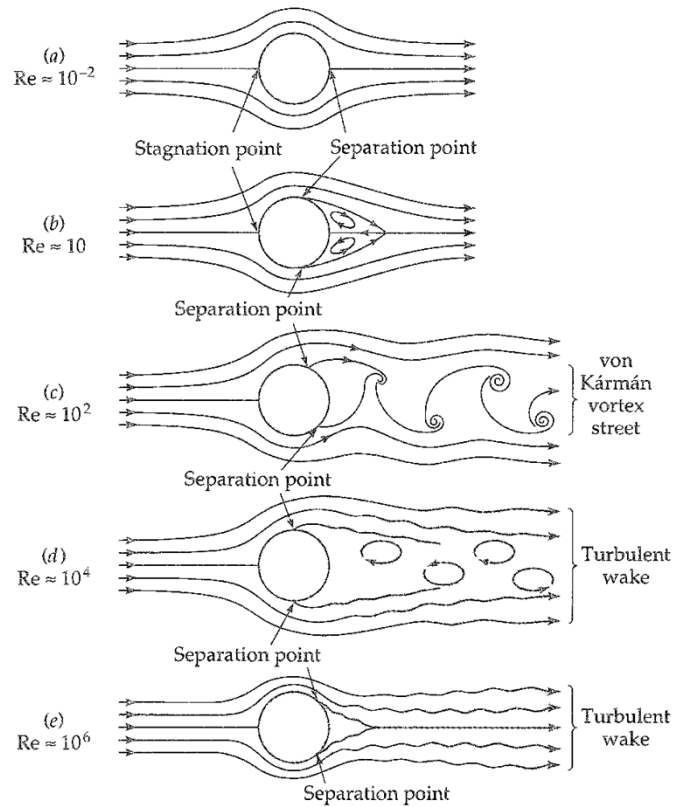
2.2 Sedimentação

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad g \cdot \frac{(\rho_{sol} - \rho)}{\rho_{sol}} = \frac{3}{4} \cdot C_D v_T^2 D_P \quad v_T = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot (\rho_{sol} - \rho) \cdot D_P}{3 \cdot C_D \rho_{sol}}}$$

$$Re_P = \frac{\rho_{liq} v D_P}{\mu_{liq}} \quad \begin{cases} Re_P < 0,4 & C_D = 24 / Re_P \\ 0,4 < Re_P < 500 & C_D = 10 / \sqrt{Re_P} \\ 500 < Re_P < 200.000 & C_D = 0,43 \end{cases}$$



Vários fluxos



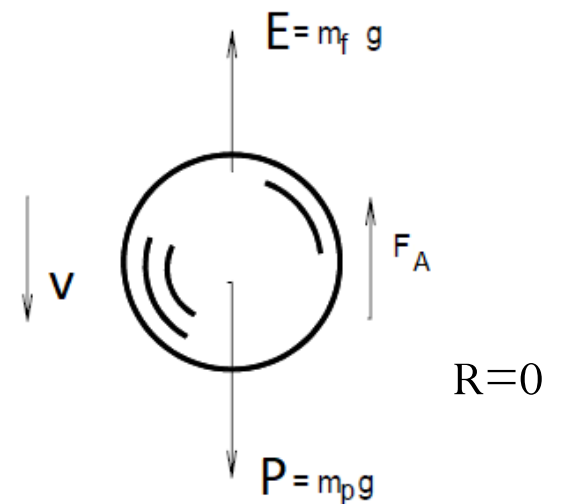
2.3 Fluidização

$$0 = P - E - F_A$$

$$0 = (P - E) \quad \text{Força cinética}$$

$$m_{sol} \cdot g - m_{liq} \cdot g = V (\rho_{sol} - \rho_{liq}) g$$

$$(\rho_{sol} - \rho_{liq}) g = \frac{3}{4} \cdot C_D v^2 \rho \cdot \frac{A_P}{V}$$



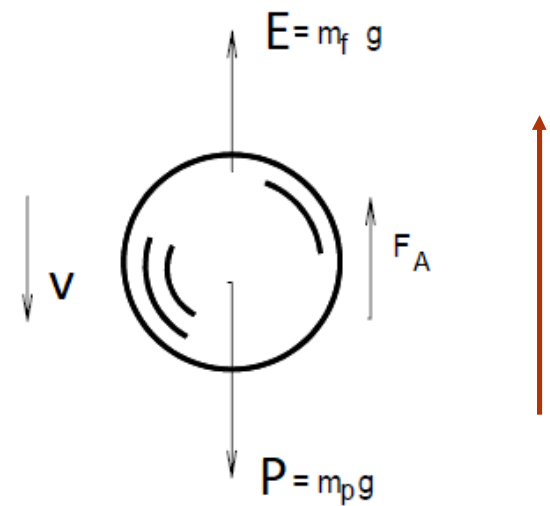
$$\rho = \frac{m}{V} \quad \frac{\rho}{m} = \frac{1}{V} \quad \frac{A_P}{V} = D_P$$

2.4 Elutriação

$$F_R = F_A - (P - E)$$

$$m_{sol} \cdot g - m_{liq} \cdot g = V (\rho_{sol} - \rho_{liq}) g$$

$$(\rho_{sol} - \rho_{liq}) g = \frac{3}{4} \cdot C_D v^2 \rho \cdot \frac{A_P}{V}$$



$$\rho = \frac{m}{V} \quad \frac{\rho}{m} = \frac{1}{V} \quad \frac{A_P}{V} = D_P$$

3 Aplicação

- Estimar a velocidade terminal para partículas entre 80-100 mesh de calcáreo ($\rho_p = 2800 \text{ kg/m}^3$) que sedimenta em água a 30°C .

Dados $\mu=0,801 \text{ cP}$ $\rho_L = 995 \text{ kg/m}^3$

Solução

- Vamos considerar regime de Stokes ($\text{Re}_p < 0,3$)

- $C_D = 24 / \text{Re}_p \rightarrow$ diâmetro de Stokes: $d_{St} = \sqrt{\frac{18 \eta u}{(\rho_s - \rho_f) g}}$

3 Aplicação

- $D_P = \frac{0,175+0,147}{2} = 0,161 \text{ mm} = 1,61 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
- $\mu = 0,801 \text{ cP} = 0,801 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m/s}$
- $\text{Re}_P \text{ baixo} \rightarrow v_t = \frac{D_P^2 g (\rho_s - \rho_L)}{18 \mu_L} = \frac{(1,61 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot (2800 - 995) \text{ kg/m}^3}{18 \mu_L}$
- $v_t = 0,032 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re}_P = 6,4$
- $C_d = 5,31-4,88 \rightarrow v_t = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{(2800 - 995) \cdot 10 \cdot 1,61 \cdot 10^{-4}}{995 \cdot 0,43}} = 0,0952 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re}_P = 19$

4. Mais correlações

Autor	C_d	Re_p
Stokes	$C_d = \frac{24}{Re_p}$	$Re_p < 1$
Ossen (1910)	$C_d = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right)$	$Re_p < 5$
Putman (1961)	$C_d = \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0,15 Re_p^{0,687} \right)$	$Re_p < 10^3$
Haider e Levenspiel (1989)	$C_d = \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0,1806 Re_p^{0,687} + \frac{0,4251 Re_p}{1 + \frac{6880,9}{Re_p}} \right)$	$1 < Re_p < 2,0 \cdot 10^5$
White (1991)	$C_d = 0,4 + \frac{24}{Re_p} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re_p}}$	$Re_p < 2,0 \cdot 10^5$

4. Mais correlações

Quadro 7.1 Correlações para o coeficiente de arraste (SILVA, 2006)

Autor	Modelo	Validade
Stokes	$C_D = \frac{24}{Re_p}$ (7.22)	$Re_p < 1$
Ossen (1910)	$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right)$ (7.25)	$Re_p < 5$
Putnam (1961)	$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0,15 Re_p^{0,687})$ (7.26)	$Re_p < 10^3$
	$C_D = \frac{24}{Re_p} (0,0183 Re_p)$ (7.27)	$10^3 \leq Re_p < 2,0 \times 10^5$
Tilly (1969)	$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0,197 Re_p^{0,63} + 2,6 \times 10^{-5} Re_p^{1,38})$ (7.28)	$Re_p < 2,0 \times 10^5$
Clift e Gauvin (1970)	$C_D = \frac{24}{Re_p} \left[1 + 0,15 Re_p^{0,687} + \frac{0,0175 Re_p}{1 + \frac{4,25 \times 10^4}{Re_p^{1,16}}} \right]$ (7.29)	$Re_p < 2,0 \times 10^5$
Haider e Levenspiel (1989)	$C_D = \frac{24}{Re_p} \left[1 + 0,1806 Re_p^{0,687} + \frac{0,4251 Re_p}{1 + \frac{6.880,9}{Re_p}} \right]$ (7.30)	$1 \leq Re_p < 2,0 \times 10^5$
White (1991)	$C_D = 0,4 + \frac{24}{Re_p} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re_p}}$ (7.31)	$Re_p < 2,0 \times 10^5$

5 Aplicação – processo iterativo

- Se C_d é função do Re_p , é necessário um processo iterativo

$$\text{Para } C_d = \frac{24}{Re_p} (1 + 0,15 Re_p^{0,687})$$

- 1a iteração: $Re_p = 6,4 \rightarrow C_d = 5,76 \rightarrow v_t = 0,02599 \rightarrow Re_p = 5,2$
- 2a iteração: $Re_p = 5,2 \rightarrow C_d = 6,76 \rightarrow v_t = 0,02399 \rightarrow Re_p = 4,798$
- 3a iteração: $Re_p = 4,798 \rightarrow C_d = 7,2 \rightarrow v_t = 0,02324 \rightarrow Re_p = 4,649$
- 4a iteração: $Re_p = 4,649 \rightarrow C_d = 7,3874 \rightarrow v_t = 0,0229 \rightarrow Re_p = 4,591$
- 5a iteração: $Re_p = 4,591 \rightarrow C_d = 7,46 \rightarrow v_t = 0,02284 \rightarrow Re_p = 4,56$
- 6a iteração: $Re_p = 4,56 \rightarrow C_d = 7,49 \rightarrow v_t = 0,02280 \rightarrow Re_p = 4,56$

6 Conclusões



Balanço de forças – F_R : sedimentação, fluidização e elutriação



Do laminar ao turbulento



Diversas correlações



Resultados diferentes – relações empíricas

Bibliografia

- CREMASCO, M.A. **Operações Unitárias em Sistemas Particulados e Fluidomecânicos**, Blucher, 2012.
- MUNSON, B. R. et al. **Fundamentals of Fluid Mechanics**, 6a edição John Wiley & Sons, 2009.
- JM Coulson, JF Richardson, JR Backhurst, JH Harker, **Chemical Engineering: Vol. 2. Particle Technology and Separation Processes**, 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2019.