Aula 18 - Movimento Browniano: Exercícios

Q 1. Um recipiente lacrado contém um gás rarefeito de neônio, Ne, com uma quantidade de $2,0 \times 10^{19}$ átomos/cm^3 e energia cinética média por átomo de $5,2 \times 10^{-21}$J. Sabendo que a massa do Ne é 20 u.m.a. e que cada átomo realiza em média 10^8 colisões/s, determine:

(a) a pressão e temperatura do gás;

(b) a velocidade média dos átomos;

(c) o raio de Ne;

(d) a energia cinética quadrática média de cada átomo deste gás.

Q 2. Uma pessoa embriagada anda cambaleando com um movimento muito parecido com um movimento Browniano em 1D com a probabilidade de dar um passo para direita de 0,6. Considere que cada passo dessa pessoa tem cerca de 80 cm e dura cerca de 2 s, determine:

(a) a probabilidade desta pessoa ter dado 5 passos para a direita de um total de 10 passos (discuta este resultado com o movimento Browniano com equiprobabilidade para direita e esquerda);

(b) o coeficiente de difusão desse movimento;

(c) quantos passos em média para a direita esta pessoa precisa dar para ter se deslocado em média 100 m e 1 km;

(d) compare o tempo para esta pessoa ter deslocado em média 1 km com esse movimento e com um movimento retilíneo uniforme. Discuta este resultado.

Q1. a) A temperatura pode ser calculada pelo teorema da equipartição. Para isso, assume que nas condições dadas, o Ne se comporta como um gás ideal:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow T = \frac{2\langle E \rangle}{3 k_B} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5,2 \cdot 10^{-21}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 2,51 \cdot 10^{2}$$

$$\therefore T = 251 \text{ K}$$

Com este resultado, calculamos a pressão com a equação geral dos gases:

$$PV = N k_B T \Rightarrow P = \frac{N}{V} k_B T = \rho k_B T$$

ou ainda, $P = \frac{2}{3} \rho \langle E \rangle$, usando o T.E.E.

$$P = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 10^{19} \frac{\text{átomos}}{cm^3} \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-21} \frac{J}{\text{átomo}} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 10^{19} \frac{1}{(10^{-2}\ m)^3} \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-21}\ Nm$$

$$= 6{,}93 \cdot 10^{4} \frac{N}{m^2} \simeq 0{,}7 \cdot 10^{5} \frac{N}{m} = 0{,}7\,atm$$

b) Seja $f(v) = A v^2 e^{-\alpha v^2}$ a distribuição de Maxwell-Boltzmann, com $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$ e $\alpha = \frac{m}{2k_B T}$, a velocidade média por partícula é definida como:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v)\, dv = A \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv = A\, G_3$$

$$* \; G_{2n+1} = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}} \Rightarrow G_3 = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 k_B T}{m}\right)^2 = (2\pi m)^{-1/2} (k_B T)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{8 k_B T}{\pi m}\right)^{1/2} = \left(\frac{16}{3\pi} \frac{\langle E \rangle}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{16}{3\pi} \cdot \frac{5{,}2 \cdot 10^{-21}}{20\ u.m.a}\right)^{1/2}$$

conversão: $1\ u.m.a = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ Kg$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = \left(\frac{16}{3\pi} \cdot \frac{5{,}2 \cdot 10^{-21}}{20 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}\right)^{1/2} \simeq 515\ m/s$$

c) Da equação do livre caminho médio:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\rho_N \pi d^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}\,\rho_N \pi r^2}$$

Além disso, a frequência de colisão é dado por:

$$f = \tau^{-1}$$

$$V_{rms} = \frac{\lambda}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}} \Rightarrow f = \frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{f}$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{f}{4\sqrt{2}\,\rho_N \pi \sqrt{\langle v^2 \rangle}} \right)^{1/2}$$

Vamos calcular V_{rms}:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v)\, dv = A \int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2} dv = A\, G_4$$

$$* \; G_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}} \Rightarrow G_4 = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{\alpha^5} \right)^{1/2}$$

$$E = \frac{m v^2}{2}$$

$$\frac{2E}{m}$$

$$\langle V^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8} \pi^{1/2} \left(\frac{2 k_B T}{m} \right)^{5/2} = \frac{3}{m} k_B T = \frac{2}{m} \langle E \rangle$$

O que é equivalente a fazer $\langle E \rangle = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$ diretamente

Assim:

$$r = \left(\frac{f}{4\sqrt{2}\,\rho_N \pi \left(\frac{2}{m}\langle E \rangle\right)^{1/2}} \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{10^8}{4\sqrt{2}\; 2.10^{25} \cdot \pi \left(\frac{2 \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-21}}{20 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} \right)^{1/2}} \right)^{1/2} \simeq 0{,}225\ \text{Å}$$

d) $E_{rms} = \sqrt{\langle E^2 \rangle}$

$$\langle E^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} m^2 \langle v^4 \rangle = \frac{1}{4} m^2 \int_0^\infty v^4 f(v)\, dv$$

$$= \frac{1}{4} m^2 A \int_0^\infty v^6 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{1}{4} m^2 A\, G_6 = \frac{1}{4} m^2 A \frac{5.3}{2^4} \left(\frac{\pi}{\alpha^7} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{15}{16} \frac{1}{\cancel{4}} m^2\, \cancel{4}\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \pi^{1/2} \left(\frac{2 k_B T}{m} \right)^{7/2}$$

$$= 15\, m^{2+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}}\, \pi^{1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}-4} (k_B T)^{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}} = 15 \cdot 2^{-2} (k_B T)^2$$

$$= \frac{15}{4} (k_B T)^2$$

$$\Rightarrow E_{rms} = \sqrt{\langle E^2 \rangle} = \frac{1}{2} \sqrt{15}\, k_B T = \frac{1}{2} \sqrt{15}\, \frac{2}{3} \langle E \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{5}{3}}\, \langle E \rangle = \sqrt{\frac{5}{3}}\; 5{,}2 \cdot 10^{-21} = 6{,}7 \cdot 10^{-21}\ J$$

Q2. a) O movimento Browniano é descrito por uma distribuição binomial, logo

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n q^{N-n}$$

, onde n é o número de passos para direita, p é a probabilidade de dar um passo para frente e q, para esquerda, com $p+q=1$

Com $N=10$ e $n=5$, temos:

$$P(5) = \frac{10!}{5!\,5!}\, 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^5 = \frac{10.9.8.7.6.\cancel{5!}}{5!\,\cancel{5!}}(0{,}6.0{,}4)^5 = \overbrace{\frac{\overset{2}{\cancel{10}}.\,9.\,\cancel{8}.\,7.\,\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{5}.\cancel{4}.\overset{2}{\cancel{3}}.\cancel{2}.1}}^{252} \cdot 0{,}24^5$$

$\approx 0{,}2$ ou 20%

Já para o caso de equiprobabilidade, $p=q=0{,}5$, temos:

$$P_{eq}(5) = \frac{10!}{5!\,5!}\, 0{,}5^5 . 0{,}5^5 = 252 \,.\, 0{,}25^5 \approx 0{,}246 \text{ ou } 24{,}6\%$$

Assim, tem-se uma maior probabilidade de dar 5 passos para frente na situação de equiprobabilidade. Isto acontece porque a distribuição binomial tem valor mais provável em $n=5$, enquanto que para $p=0{,}6$ o P mais provável é próximo de $n=6$.

b) Usando a equação do coeficiente de difusão:

$$D = \frac{2\ell^2 pq}{\tau}$$, onde ℓ é o tamanho do passo e τ o intervalo de tempo entre cada passo

$$\Rightarrow D = \frac{2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}{2} = 0{,}15 \ m^2/s$$

Já no caso com equiprobabilidade:

$$D_{eq} = \frac{2 \cdot 0{,}8^2 \ 0{,}5^2}{2} = 0{,}16 \ m^2/s$$

c) A posição em x é dada por:

$$x = n\ell - (N-n)\ell$$, onde: $n\ell \rightarrow$ deslocamento para direita
$(N-n)\ell \rightarrow$ deslocamento para esquerda

$$\Rightarrow x = 2n\ell - N\ell \Rightarrow \langle x \rangle = 2\ell\langle n \rangle - N\ell$$

como $\langle n \rangle = Np \Rightarrow \langle x \rangle = 2\ell Np - N\ell = N\ell(2p-1)$

$$N = \frac{\langle x \rangle}{\ell(2p-1)}$$

Para $p = 0{,}6$:

$$N_{100} = \frac{100}{0{,}8(1{,}2-1)} = \frac{100}{0{,}8 \cdot 0{,}2} = 625 \text{ passos}$$

$$N_{1000} = \frac{1000}{0,16} = 6250$$

Nos dois casos, a média do número de passos é:

$$\langle n \rangle = N_{100}\, p = 625 \cdot 0,6 = 375 \text{ passos para direita}$$

$\hookrightarrow$ $625 - 375 = 250$ passos para esquerda

d) No MRU para direita a velocidade seria:

$$v = \frac{\ell}{\tau} = \frac{0,8}{2} = 0,4 \text{ m/s}$$

Para deslocar 100m e 1000m levaria:

$$\Delta t = \frac{100}{0,4} = 250\text{s} \quad \text{e} \quad \Delta t = \frac{1000}{0,4} = 2500\text{s}$$

Já na caminhada aleatória, o tempo para esses deslocamentos é de

$$\Delta t = 625 \cdot 2 = 1250\text{s} \qquad \Delta t = 6250 \cdot 2 = 12500\text{s}$$

Ou seja, demoraria 5 vezes mais para o mesmo deslocamento, se comparado com o movimento retilíneo uniforme.