MAT6682 - Tópicos de Análise Funcional - 2023
Lista 7

1. Estrutura dos Espaços c_0 e ℓ_p

A seguinte notação será usada nos Exercícios 1, 2 e 3: dados X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, $\ell_p(X)$ denota o espaço de Banach das sequências $(x_n)_n$ em X tais que $(\|x_n\|)_n \in \ell_p$, munido da norma $\|\cdot\|_p$. Analogamente, $c_0(X)$ denota o subespaço fechado de $\ell_\infty(X)$ das sequências $(x_n)_n$ em X tais que $x_n \longrightarrow 0$. Também escreveremos $X \cong Y$ se os espaços X e Y são isomorfos.

1. Dada uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, considere a aplicação linear $T : \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$T((x_n)_n) = (\beta_k)_{k\geq 1},$$

onde $x_n = (\alpha_m^n)_{m\geq 1}$ e $\beta_k = \alpha_m^n$ se $k = \sigma(n,m)$.

a) Mostre que a restrição de T a $\ell_p(\ell_p)$ é uma isometria sobre ℓ_p para todo $1 \leq p \leq \infty$.

b) Mostre que a restrição de T a $c_0(c_0)$ é uma isometria sobre c_0.

2. Dados X e Y espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, prove as seguintes afirmações:

a) $\ell_p(X \oplus Y) \cong \ell_p(X) \oplus \ell_p(Y)$.

b) $\ell_p(X) \oplus X \cong \ell_p(X)$.

c) $c_0(X \oplus Y) \cong c_0(X) \oplus c_0(Y)$.

d) $c_0(X) \oplus X \cong c_0(X)$.

e) Se $X \cong Y$, então $\ell_p(X) \cong \ell_p(Y)$ e $c_0(X) \cong c_0(Y)$.

3. **(Método de Decomposição de Pełczyński)** Sejam X e Y espaços de Banach tais que X é isomorfo a um subespaço complementado de Y e Y é isomorfo a um subespaço complementado de X. Suponha também que uma das condições a seguir seja satisfeita:

(i) $X \cong X \oplus X$ e $Y \cong Y \oplus Y$.

(ii) $X \cong c_0(X)$ ou $X \cong \ell_p(X)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$.

Siga o roteiro abaixo para provar que $X \cong Y$.

a) Mostre que se (i) é satisfeita, então $X \cong X \oplus Y \cong Y$.

b) Mostre que se (ii) é satisfeita, então $X \cong X \oplus X$ e $Y \cong X \oplus Y$. Em seguida, use o Exercício 2 para provar que $X \cong X \oplus Y$.

4. Mostre que c_0 e ℓ_1 não possuem nenhum subespaço reflexivo de dimensão infinita.

5. Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é *estritamente singular* se $T|_Z$ não é isomorfismo sobre sua imagem para todo subespaço de dimensão infinita Z de X.

a) Mostre que todo operador compacto é estritamente singular.

b) Dados $1 \leq p, r < \infty$, $p \neq r$, mostre que todo operador linear contínuo $T : \ell_p \to \ell_r$ é estritamente singular.

c) Dados $1 \leq p < r < \infty$, mostre que a inclusão natural $I : \ell_p \to \ell_r$ é um operador linear contínuo estritamente singular que não é compacto.

6. Mostre que ℓ_1 contém um subespaço fechado que não é complementado. (*Sugestão:* escolha um espaço de Banach separável X não isomorfo a ℓ_1 e use o Teorema de Banach-Mazur.)

7. Mostre que c_0 não é isomorfo a nenhum dual.

8. Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Prove as seguintes afirmações:

a) Se Y é injetivo, então Y é complementado em X.

b) Se X é injetivo e Y é complementado em X, então Y também é injetivo.

c) Se X é injetivo, Y é complementado em X e Z é um subespaço de X isomorfo a Y, então Z também é complementado em X.

9. Mostre que um espaço de Banach separável é injetivo se, e somente se, é isomorfo a um subespaço complementado de ℓ_∞.[1] (*Sugestão:* vimos em aula que se X é separável, então existe $T : X \to \ell_\infty$ isometria linear sobre sua imagem. Use o exercício anterior e a injetividade de ℓ_∞.)

10. Mostre que c_0 não é injetivo (embora seja separavelmente injetivo). Conclua que ℓ_∞ não contém nenhum subespaço complementado isomorfo a c_0.

11. Seja c o espaço de Banach das sequências convergentes de escalares munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ e considere o funcional linear contínuo $e_0^* \in c^*$ dado por $e_0^*(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n$ para todo $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c$. Seja $P : c \to c_0$ uma projeção contínua sobre c_0.

a) Mostre que P é da forma $P(x) = x - e_0^*(x)x_0$, para algum $x_0 \in c$ com $e_0^*(x_0) = 1$.

b) Mostre que $\|P\| \geq 2$.

c) Conclua que 2 é a melhor constante possível no Teorema de Sobczyk.

12. Dizemos que um espaço de Banach X é *projetivo* se X verifica a seguinte condição: se Y é um espaço de Banach e $T : Y \to X$ é um operador linear contínuo sobrejetor, então existe Z subespaço complementado de Y isomorfo a X.

a) Mostre que ℓ_1 é projetivo.

b) Mostre que todo espaço de Banach separável projetivo de dimensão infinita é isomorfo a ℓ_1.

[1] Com uma pequena modificação, é possível mostrar que um espaço de Banach é injetivo se, e somente se, é isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_\infty(I,\mathbb{K}) = \left\{(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : (\alpha_i)_{i\in I} \text{ é limitada}\right\}$ para algum conjunto não vazio I.