Simulado 4 - SMA304

Questão 1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por

$$T((1,0,0)) = (1,0,0,2),\ T((0,1,0)) = (0,1,-1,0) \text{ e } T((0,0,1)) = (1,-1,1,2).$$

Pode-se afirmar que:

a ( ) $\mathrm{Im}(T) = [\{(2,0,0,4),(1,1,-1,2)\}]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [\{(1,1,-1)\}]$.

b ( ) $\mathrm{Im}(T) = [\{(2,0,0,4),(1,1,-1,2)\}]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [\{(-1,1,1)\}]$.

c ( ) $\mathrm{Im}(T) = [\{(1,0,0,2),(0,1,-1,0)\}]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [\{(1,-1,1)\}]$.

d ( ) $\mathrm{Im}(T) = [\{(1,0,0,2),(0,1,1,0\}]$ e $\mathrm{Ker}(T) = [\{(1,-1,-1)\}]$.

e ( ) Nenhuma das alternativas apresentadas.

Questão 2. Seja $T\colon \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

em que B é a base canônica do $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e C é a base do $\mathbb{R}^3$ dada por $C = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$. Então $T(-1+2t)$ é igual a

a ( ) $(1,4,-7)$.

b ( ) $(-1,3,7)$.

c ( ) $(1,5,-2)$.

d ( ) $(-1,-3,11)$.

e ( ) $(-1,0,7)$.

Questão 3. Considere a transformação linear $T\colon \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ dada por

$$T(p(x)) = x^2\frac{d^2p(x)}{dx^2} + x\frac{dp(x)}{dx} + p(x).$$

Responda as perguntas seguintes na ordem e escolha a alternativa correspondente.

(I) T é injetiva?

(II) T é sobrejetiva?

(III) T é um isomorfismo?

Assinale uma alternativa correta:

a ( ) sim, sim, sim.

b ( ) não, sim, não.

c ( ) sim, não, não.

d ( ) não, não, não.

e ( ) nada se pode afirmar.

Questão 4. Seja T uma transformação linear de V em W, em que $\dim V = 6$ e $\dim W = 3$. Sejam, também, B uma base de V e C uma base de W. Suponha que a matriz da transformação T com respeito a estas bases seja

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 0 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

É correto afirmar que $\dim N(T)$ vale

a ( ) Somente com as informações dadas não dá para saber.

b ( ) 3

c ( ) 0

d ( ) 2

e ( ) 4

Questão 5. Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (x-y, 2y, y+z).$$

Determine a transformação inversa T^{-1} usando a matriz $[T]_{C,C}$, em que C é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, e assinale a alternativa correta:

a ( ) $T^{-1}(x,y,z) = \left(x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}y, z + \frac{1}{2}y\right)$.

b ( ) $T^{-1}(x,y,z) = \left(x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}y, z - \frac{1}{2}y\right)$.

c ( ) $T^{-1}(x,y,z) = \left(x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y, z - \frac{1}{2}y\right)$.

d ( ) $T^{-1}(x,y,z) = \left(x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y, z - \frac{1}{2}y\right)$.

e ( ) $T^{-1}(x,y,z) = \left(x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y, z + \frac{1}{2}y\right)$.

Questão 6. Consideremos as transformações lineares

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x,y) = (x, x+y, 0);$$

2. $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$[S]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

em que B e C são as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sobre a transformação linear $S \circ T$ podemos afirmar que:

a ( ) $S \circ T$ é um operador em $\mathbb{R}^2$ invertível.

b ( ) $S \circ T$ é um operador em $\mathbb{R}^2$ não-invertível.

c ( ) $S \circ T$ é um operador em $\mathbb{R}^3$ invertível.

d ( ) $S \circ T$ é um operador em $\mathbb{R}^3$ não-invertível.

e ( ) Nenhuma das respostas anteriores.

Questão 7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz com respeito à base canônica C de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Podemos afirmar que:

a ( ) T é invertível.

b ( ) T não é invertível e $\mathcal{N}(T) = [(1, -2, 1)]$.

c ( ) T não é invertível e $\mathcal{N}(T) = [(-1, -2, 1)]$.

d ( ) T não é invertível e $\mathcal{N}(T) = [(1, -2, 1), (-1, -2, 1)]$.

e ( ) Nenhuma das alternativas anteriores é correta.

Questão 8. Considere as seguintes afirmações:

(I) $T \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(0) - 1 \\ 2p(-1) & p'(2) \end{pmatrix}$, para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, em que p' denota a derivada de p, é uma transformação linear.

(II) Todo operador linear $T \colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é um isomorfismo.

(III) Existe uma transformação linear $T \colon \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ injetora.

Assinale a alternativa correta.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Questão 9. Considere as seguintes afirmações:

(I) Seja V um espaço vetorial de dimensão 8. Existe uma transformação linear $T\colon V \to V$ tal que $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.

(II) Seja V um espaço vetorial de dimensão 4. Então existe uma transformação linear $T\colon V \to V$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

(III) Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Se $\dim U = \dim V - \dim \mathrm{Im}(T)$, então T é injetora.

Assinale a alternativa correta.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Questão 10. Sejam U, V espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear.

1. Se $\dim(U) > \dim(V)$, então T não é injetora.
2. Se $\dim(U) = \dim(V) + 1$ e $\dim(\mathcal{N}(T)) = 1$, então T é sobrejetora.
3. Se $\dim(U) < \dim(V)$, então T não pode ser sobrejetora.

Podemos afirmar que

a ( ) As três afirmativas estão corretas.

b ( ) Apenas duas das três afirmativas são corretas.

c ( ) Apenas uma das três afirmativas é correta.

d ( ) Nenhuma das afirmativas é correta.