Resolução do problema de programação linear.

Análise de sistemas

Maria M. Gamboa

2º Semestre de 2023. 09/10/2023

Programação Linear

Hipóteses de linearidade

- Aditividade
- Proporcionalidade
- Fracionamento ou divisibilidade
- Coeficientes constantes

Forma padrão

Formulação geral

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

sujeito às restrições: $g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$

$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad X \geq 0 \, (\text{comum})$$

Problema linear

$$\text{minimizar} f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

sujeito às restrições:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \leq 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \leq 0$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + b_m \leq 0$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
max. \quad & 6x_1 + 8x_2 \\
s.a. \quad & 3x_1 + x_2 \leq 50 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\
& x_1 \leq 15 \\
& x_2 \leq 10 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de programação linear

Para programação linear:
Métodos de cálculo definidos para restrições de igualdade.
Incorporar variáveis de folga (ou de excesso): x_{n+j}

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar}\, f(X) &= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\
\text{sujeito às restrições:}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
& ... \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in [1, n]
\end{aligned}
$$

Problema de programação linear

Para programação linear:
Métodos de cálculo definidos para restrições de igualdade.
Incorporar variáveis de folga (ou de excesso): x_{n+j}

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\
\text{sujeito às restrições:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
& ... \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in [1, n]
\end{aligned}$$

Sistema de m equações com $m + n$ incógnitas.

Problema de programação linear

Notação matricial, com as variáveis de folga como novos elementos do vetor **x**

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \text{(cuidado, redefinição)}\\
\text{s. a: } \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\
\mathbf{x} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Onde:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \dots & a_1 n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 1 & a_2 2 & \dots & a_2 n & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ a_m 1 & a_m 2 & \dots & a_m n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}
$$

Resolução gráfica

Problemas podem ser resolvidos, ou pelo menos melhor entendidos, se representados graficamente.

- Definir o espaço de soluções
  Só se for dimensão 1, 2, 3 (muito complicada visualização) pode ser representado graficamente. Se maior, continua valendo a análise mas não podemos desenhar.

Resolução gráfica

Problemas podem ser resolvidos, ou pelo menos melhor entendidos, se representados graficamente.

- Definir o espaço de soluções
- Identificar a região factível

  Cada uma das restrições é representada por uma reta que divide sub-regiões que atendem ou não a restrição.

  O vetor gradiente da função de restrição serve para identificar qual 'lado' da reta é factível.

  A sub-região de interseção das sub-regiões definidas por todas as interseções é a região factível.

Resolução gráfica

Problemas podem ser resolvidos, ou pelo menos melhor entendidos, se representados graficamente.

- Definir o espaço de soluções
- Identificar a região factível
- Identificar curva de nível da função objetivo
  Para um valor qualquer da função objetivo podem ser encontrados dois pontos no espaço se soluções que correspondem. A função é linear, e seu vetor gradiente indica o sentido de crescimento.
  A partir de uma única linha, é possível determinar comportamento da função.

Resolução gráfica

Problemas podem ser resolvidos, ou pelo menos melhor entendidos, se representados graficamente.

- Definir o espaço de soluções
- Identificar a região factível
- Identificar curva de nível da função objetivo
- Encontrar a posição limite
  Graficamente, pode ser analisado o 'avanço' da função objetivo até os valores desejados, e identificada a situação limite de estar na iminência de sair da região factível.

Resolução gráfica

Problemas podem ser resolvidos, ou pelo menos melhor entendidos, se representados graficamente.

- Definir o espaço de soluções
- Identificar a região factível
- Identificar curva de nível da função objetivo
- Encontrar a posição limite
- Obter o máximo As coordenadas do ponto limite encontrado são a solução ótima, e o valor da F.O. pode ser calculado nesse ponto.
  Pode existir mais de um ponto?

Resolução gráfica

Problemas podem ser resolvidos, ou pelo menos melhor entendidos, se representados graficamente.

- Definir o espaço de soluções
- Identificar a região factível
- Identificar curva de nível da função objetivo
- Encontrar a posição limite
- Obter o máximo
- Conclusões importantes sobre o método. Cómo generalizar?

Resolução gráfica

Problemas podem ser resolvidos, ou pelo menos melhor entendidos, se representados graficamente.

- Definir o espaço de soluções
- Identificar a região factível
- Identificar curva de nível da função objetivo
- Encontrar a posição limite
- Obter o máximo
- Conclusões importantes sobre o método. Cómo generalizar?
- Casos especiais (inexistente, ilimitado, múltiplo...)

Paralelo solução numérica com solução gráfica

- Interpretação das variáveis de folga.

Paralelo solução numérica com solução gráfica

- Interpretação das variáveis de folga.
- 'Se um problema de otimização linear tem solução ótima, existe um vértice ótimo'.
  Número de soluções que podem ser ótimas é finito (verificado na gráfica).
  Significado no sistema de equações? Possível algoritmo?

Paralelo solução numérica com solução gráfica

- Interpretação das variáveis de folga.
- 'Se um problema de otimização linear tem solução ótima, existe um vértice ótimo'.
  Número de soluções que podem ser ótimas é finito (verificado na gráfica).
  Significado no sistema de equações? Possível algoritmo?
- Ordem da busca exaustiva:
  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Paralelo solução numérica com solução gráfica

- Interpretação das variáveis de folga.
- 'Se um problema de otimização linear tem solução ótima, existe um vértice ótimo'.
  Número de soluções que podem ser ótimas é finito (verificado na gráfica).
  Significado no sistema de equações? Possível algoritmo?
- Ordem da busca exaustiva:
  $$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
- Busca mais eficiente: George Dantzig (1947), e depois John von Neumann e Leonid Kantoróvich: **MÉTODO SIMPLEX**

Conceitos básicos do método simplex

Problema já ampliado na forma:

$$\text{maximizar} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\text{s. a: } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Com tamanho x[n], A[mxn], c[n], b[m]   (cuidado, redefinição n)

- Solução: qualquer vetor **x**' que satisfaz as equações

Conceitos básicos do método simplex

Problema já ampliado na forma:

$$\text{maximizar} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{s. a: } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Com tamanho x[n], A[mxn], c[n], b[m]   (cuidado, redefinição n)

- Solução: qualquer vetor **x**' que satisfaz as equações
- Solução básica: uma solução com pelo menos $(m - n)$ variáveis nulas, e até m não nulas.

Conceitos básicos do método simplex

Problema já ampliado na forma:

$$\text{maximizar} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{s. a: } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Com tamanho x[n], A[mxn], c[n], b[m] (cuidado, redefinição n)

- Solução: qualquer vetor **x**' que satisfaz as equações
- Solução básica: uma solução com pelo menos $(m - n)$ variáveis nulas, e até m não nulas.
- Solução básica não degenerada: com exatamente m componentes não nulos

Conceitos básicos do método simplex

Problema já ampliado na forma:

$$\text{maximizar} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\text{s. a:}\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Com tamanho x[n], A[mxn], c[n], b[m]   (cuidado, redefinição n)

- Solução: qualquer vetor **x**' que satisfaz as equações
- Solução básica: uma solução com pelo menos $(m - n)$ variáveis nulas, e até m não nulas.
- Solução básica não degenerada: com exatamente m componentes não nulos
- Solução básica factível(viável): está dentro da região factível. Se não, é inviável ou não factível

Conceitos básicos do método simplex

Problema já ampliado na forma:

$$\text{maximizar} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{s. a: } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Com tamanho x[n], A[mxn], c[n], b[m]   (cuidado, redefinição n)

- Solução: qualquer vetor **x**' que satisfaz as equações
- Solução básica: uma solução com pelo menos $(m - n)$ variáveis nulas, e até m não nulas.
- Solução básica não degenerada: com exatamente m componentes não nulos
- Solução básica factível(viável): está dentro da região factível. Se não, é inviável ou não factível
- Solução ótima: A solução básica viável associada a melhor F.O.

Estratégia simplex

- Começar com uma solução básica factível qualquer

Estratégia simplex

- Começar com uma solução básica factível qualquer
- Perturbar uma solução básica factível alterando uma das variáveis não-básicas. Essa não-básica deixa de ser nula.

Estratégia simplex

- Começar com uma solução básica factível qualquer
- Perturbar uma solução básica factível alterando uma das variáveis não-básicas. Essa não-básica deixa de ser nula.
  - Qual variável perturbar? A de maior impacto na função objetivo

Estratégia simplex

- Começar com uma solução básica factível qualquer
- Perturbar uma solução básica factível alterando uma das variáveis não-básicas. Essa não-básica deixa de ser nula.
    - Qual variável perturbar? A de maior impacto na função objetivo
    - Quanto pertubar? O máximo possível sem que deixe de ser solução factível

Estratégia simplex

- Começar com uma solução básica factível qualquer
- Perturbar uma solução básica factível alterando uma das variáveis não-básicas. Essa não-básica deixa de ser nula.
  - Qual variável perturbar? A de maior impacto na função objetivo
  - Quanto pertubar? O máximo possível sem que deixe de ser solução factível
- Alguma básica passa a ser não básica (nula), sai da base

Estratégia simplex

- Começar com uma solução básica factível qualquer
- Perturbar uma solução básica factível alterando uma das variáveis não-básicas. Essa não-básica deixa de ser nula.
    - Qual variável perturbar? A de maior impacto na função objetivo
    - Quanto pertubar? O máximo possível sem que deixe de ser solução factível
- Alguma básica passa a ser não básica (nula), sai da base
    - Qual sai da base? a que chega ao limite (0) com o menor valor da nova base

Estratégia simplex

- Começar com uma solução básica factível qualquer
- Perturbar uma solução básica factível alterando uma das variáveis não-básicas. Essa não-básica deixa de ser nula.
  - Qual variável perturbar? A de maior impacto na função objetivo
  - Quanto pertubar? O máximo possível sem que deixe de ser solução factível
- Alguma básica passa a ser não básica (nula), sai da base
  - Qual sai da base? a que chega ao limite (0) com o menor valor da nova base
- Avaliar se é ótimo. Segundo coeficientes do vetor c. Se necessário, repetir

Estratégia simplex

- Começar com uma solução básica factível qualquer
- Perturbar uma solução básica factível alterando uma das variáveis não-básicas. Essa não-básica deixa de ser nula.
  - Qual variável perturbar? A de maior impacto na função objetivo
  - Quanto pertubar? O máximo possível sem que deixe de ser solução factível
- Alguma básica passa a ser não básica (nula), sai da base
  - Qual sai da base? a que chega ao limite (0) com o menor valor da nova base
- Avaliar se é ótimo. Segundo coeficientes do vetor c. Se necessário, repetir

Essa estrategia é implementada no **Método simplex**: Algoritmo para ser ressolvido com álgebra linear ou tabelas

Formalismo do Método simplex

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B \\
\text{s. a: } A_B X_B + A_N X_N &= \mathbf{b} \\
x_B \geq 0 \quad x_N &\geq 0
\end{aligned}
$$

Explicitando a solução básica:

$$X_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N X_N$$

E a função objetivo fica:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N X_N) + c_N^T X_N \\
&= c_B^T A_B^{-1} b - c_B^T A_B^{-1} A_N X_N + c_N^T X_N
\end{aligned}
$$

Definindo o vetor multiplicador simplex $\lambda = c_B^T A_B^{-1}$ fica:

$$
\begin{aligned}
f(x) - \lambda b &= 0 X_B + (c_N^T - \lambda A_N) X_N \\
s.a := X_B + A_B^{-1} a_N X_N &= A_B^{-1} b
\end{aligned}
$$

Formulação do método simplex em tabelas

$$\text{maximizar} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$$
$$\text{s. a: } A_B X_B + A_N X_N = \mathbf{b}$$
$$x_B \geq 0 \quad x_N \geq 0$$

	N	N	...	B	
Função	x_1	x_2	...	x_n	$=$
FO	c_1	c_2	...	c_n	f
g1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,n}$	b_1
g2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,n}$	b_2
...	...	...	...	...	...
gm	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	...	$a_{m,n}$	b_m

Algoritmo simplex no método de tabelas

- Fase I. Solução inicial
  - Verificar se há partição básica factível trivial: Existe $A_B = I$?
  - Se não, método de duas fases. (depois)

Algoritmo simplex no método de tabelas

Fase II. Iteração do método simplex

- Cálculo da solução básica
  Fazendo $X_N = 0$ calcula todos em X_B.

Algoritmo simplex no método de tabelas

Fase II. Iteração do método simplex

- Cálculo da solução básica
- Cálculo da linha da função objetivo
  Primeira linha da tabela

Algoritmo simplex no método de tabelas

Fase II. Iteração do método simplex

- Cálculo da solução básica
- Cálculo da linha da função objetivo
- Teste de otimalidade, e variável que entra na base:
  Deve entrar uma variável com o maior coeficiente positivo (se maximizar). Se todos são negativos, é a solução ótima (se max.)

Algoritmo simplex no método de tabelas

Fase II. Iteração do método simplex

- Cálculo da solução básica
- Cálculo da linha da função objetivo
- Teste de otimalidade, e variável que entra na base:
- Cálculo da direção.
  Calcular as variáveis básicas anteriores em função da nova variável básica: $\frac{b_i}{a_{i,l}}$

Algoritmo simplex no método de tabelas

Fase II. Iteração do método simplex

- Cálculo da solução básica
- Cálculo da linha da função objetivo
- Teste de otimalidade, e variável que entra na base:
- Cálculo da direção.
- Determinação da perturbação e da variável a sair da base. Sai a variável que atinge valor 0 para o valor da nova básica com que as outras continuam ≥ 0. Coincide com $min(\frac{b_i}{a_{i,l}})$

Algoritmo simplex no método de tabelas

Fase II. Iteração do método simplex

- Cálculo da solução básica
- Cálculo da linha da função objetivo
- Teste de otimalidade, e variável que entra na base:
- Cálculo da direção.
- Determinação da perturbação e da variável a sair da base.
- Atualização do sistema.
  Eliminação de Gauss para levar a nova base à forma $A_B = I$.
  Completa nova tabela.

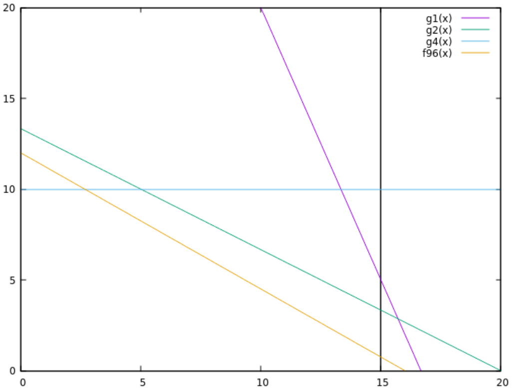
Algoritmo simplex no método de tabelas

Fase II. Iteração do método simplex

- Cálculo da solução básica
- Cálculo da linha da função objetivo
- Teste de otimalidade, e variável que entra na base:
- Cálculo da direção.
- Determinação da perturbação e da variável a sair da base.
- Atualização do sistema.
- Iteração

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
max. \quad & 6x_1 + 8x_2 \\
s.a. \quad & 3x_1 + x_2 \leq 50 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\
& x_1 \leq 15 \\
& x_2 \leq 10 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Algoritmo simplex no método de tabelas

- Fase I. Solução inicial
- Fase II. Iteração do método. Todo o anterior

Solução inicial

Se o sistema não tiver uma solução inicial trivial?

$$\text{minimizar} f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

s. a:

$$g_1 < b_1 \quad \rightarrow \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$g_2 = b_2 \quad \rightarrow \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + \cancelto{0}{x_{n+2}} = b_2$$

$$...$$

$$g_m = b_m \rightarrow a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + \cancelto{0}{x_{n+m}} = b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in [1, n]$$

Solução inicial

Se o sistema não tiver uma solução inicial trivial?

minimizar $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

s. a:

$$g_1 < b_1 \quad \rightarrow \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$g_2 = b_2 \quad \rightarrow \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + \cancelto{0}{x_{n+2}} = b_2$$

$$...$$

$$g_m = b_m \rightarrow a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + \cancelto{0}{x_{n+m}} = b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in [1, n]$$

Solução em duas fases

Solução inicial (Fase I)

Solução em duas fases:
Necessário encontrar uma solução básica factível inicial.

Solução inicial (Fase I)

Solução em duas fases:
Necessário encontrar uma solução básica factível inicial.

- Alternativa mais 'simples': 'Força bruta'
  Testar combinações de m variáveis até chegar numa solução factível.

Solução inicial (Fase I)

Solução em duas fases:
Necessário encontrar uma solução básica factível inicial.

- Alternativa mais 'simples': 'Força bruta'
  Testar combinações de m variáveis até chegar numa solução factível.
- Alternativa melhor: Criar um problema artificial.
  Somente para esa fase I: um problema de otimização com novas variáveis de folga 'artificiais', que minimize o valor dessas que não pertencem ao original.

Solução inicial (Fase I)

Solução em duas fases:
Necessário encontrar uma solução básica factível inicial.

- Alternativa mais 'simples': 'Força bruta'
  Testar combinações de m variáveis até chegar numa solução factível.
- Alternativa melhor: Criar um problema artificial.
  Somente para esa fase I: um problema de otimização com novas variáveis de folga 'artificiais', que minimize o valor dessas que não pertencem ao original.
- Da Fase I é obtida a solução básica inicial para aplicar o método simplex ao problema original

Solução inicial (Fase I)

Problema artificial

- Adicionar novas variáveis de folga 'artificiais', não negativas
  Quantas? ou m ou até totalizar m (o resultado será igualmente válido)

Solução inicial (Fase I)

Problema artificial

- Adicionar novas variáveis de folga 'artificiais', não negativas
  Quantas? ou m ou até totalizar m (o resultado será igualmente válido)
- Restrições: iguais ao original, acrescentando as variáveis artificiais (com qualquer coeficiente positivo)

Solução inicial (Fase I)

Problema artificial

- Adicionar novas variáveis de folga 'artificiais', não negativas Quantas? ou m ou até totalizar m (o resultado será igualmente válido)
- Restrições: iguais ao original, acrescentando as variáveis artificiais (com qualquer coeficiente positivo)
- Objetivo: As variáveis artificiais devem ser nulas $\rightarrow$ minimizar sua soma

Solução inicial (Fase I)

Problema artificial

- Adicionar novas variáveis de folga 'artificiais', não negativas Quantas? ou m ou até totalizar m (o resultado será igualmente válido)
- Restrições: iguais ao original, acrescentando as variáveis artificiais (com qualquer coeficiente positivo)
- Objetivo: As variáveis artificiais devem ser nulas $\rightarrow$ minimizar sua soma
- Esse problema tem solução básica trivial (após corrigir coeficientes). Ressolver por método simplex (minimização!).

Solução inicial (Fase I)

Problema artificial

- Adicionar novas variáveis de folga 'artificiais', não negativas Quantas? ou m ou até totalizar m (o resultado será igualmente válido)
- Restrições: iguais ao original, acrescentando as variáveis artificiais (com qualquer coeficiente positivo)
- Objetivo: As variáveis artificiais devem ser nulas $\rightarrow$ minimizar sua soma
- Esse problema tem solução básica trivial (após corrigir coeficientes). Ressolver por método simplex (minimização!).
- Solução do problema artificial é uma solução factível do problema inicial, mas não é necessáriamente a solução ótima dele.

Dualidade

Simplex é muito bom, mas não o melhor em casos específicos:

- Altas exigências computacionais
- Re-otimização de problemas, pelo inclusão de novas restrições.
- Análise do problema 'desde outro ponto de vista'

Problema dual $\rightarrow$ Simplex dual

Formulação do problema dual

Problema primal (original)

$$\begin{aligned} \text{maximizar: } & f(x) = cx \\ \text{s. a: } & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & h(y) = by \\ \text{s. a: } & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

- Maximização $\rightarrow$ Minimização
- Cada restrição primal $(\leq)$ $\rightarrow$ Uma variável no dual (≥ 0)
- Cada variável primal (≥ 0) $\rightarrow$ Uma restrição no dual $(\geq)$
- Vetor recursos primal (b) $\rightarrow$ Vetor custos dual
- Vetor custo primal (c) $\rightarrow$ Vetor recursos dual
- Valor ótimo primal $=$ Valor ótimo dual

Formulação do problema dual

Uma aplicação de dualidade: Incluir nova restrição no problema

- Primal:
  Após otimização, se solução ótima anterior satisfaz a nova restrição, é a solução ótima do problema novo.
  Se não satisfaz, não é nem uma solução factível.
  Precisa voltar à fase I para resolver tudo de novo.

Formulação do problema dual

Uma aplicação de dualidade: Incluir nova restrição no problema

- Primal:
  Após otimização, se solução ótima anterior satisfaz a nova restrição, é a solução ótima do problema novo.
  Se não satisfaz, não é nem uma solução factível.
  Precisa voltar à fase I para resolver tudo de novo.
- Dual:
  Nova restrição é uma nova variável.
  A solução ótima dual continua sendo uma solução factível.
  Se solução não continua ótima, pelo menos serve para iterar o método até o ótimo (fase II).

Outra interpretação de dualidade: Preços

Problema primal (original)

$$\begin{aligned} \text{maximizar: } & f(x) = cx \\ \text{s. a: } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & h(y) = by \\ \text{s. a: } & A^T y = c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

- Primal
  Função objetivo minimizar custo total($).
  Vetor x quantidades elementos (UnidadeProduto).
  Vetor c custos ($/UnidadeProduto).
  Vetor b recursos disponíveis (UnidadeRecurso)
  Matriz A gasto recursos (UnidadeRecurso/UnidadeProduto)

Outra interpretação de dualidade: Preços

Problema primal (original)

$$\begin{aligned} \text{maximizar: } & f(x) = cx \\ \text{s. a: } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & h(y) = by \\ \text{s. a: } & A^T y = c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

- Primal
  Função objetivo minimizar custo total($).
  Vetor x quantidades elementos (UnidadeProduto).
  Vetor c custos ($/UnidadeProduto).
  Vetor b recursos disponíveis (UnidadeRecurso)
  Matriz A gasto recursos (UnidadeRecurso/UnidadeProduto)
- Dual
  Função objetivo maximizar receita ($)
  Vetor Y preços ($/UnidadeRecurso)