# Otimização. Conceitos e formulação do problema

Análise de sistemas

Maria M. Gamboa

2º Semestre de 2023. 25/09/2023

# Tomada de decisão - Exercício

Com uma folha de papel A4, crie um paralelepípedo aberto (5 faces) com o maior volume interno possível.
São permitidos cortes, mas todo o paralelepípedo deve estar numa única peça de papel, mantendo sua forma por fita, cola, dobras, etc.

# Otimização

otimização matemática
programação matemática
otimização numérica
otimização

Determinação da melhor solução de problemas matemáticos definidos (segundo definição formal), que representam sistemas de qualquer tipo.

# Etapas de tratamento do problema

- Identificação do problema complexo
- Formalização do problema de otimização
- Escolha e execução do método de resolução
- Avaliação dos resultados
- Tomada de decisão

# Otimização

Em todo problema que pode ser otimizado podemos definir as componentes:

- Função objetivo
  Critério para avaliar cada solução. Deve ser maximizado (ou minimizado).

# Otimização

Em todo problema que pode ser otimizado podemos definir as componentes:

- Função objetivo
  Critério para avaliar cada solução. Deve ser maximizado (ou minimizado).
- Variáveis de decisão
  Forma de definir as soluções ao problema.

# Otimização

Em todo problema que pode ser otimizado podemos definir as componentes:

- Função objetivo
  Critério para avaliar cada solução. Deve ser maximizado (ou minimizado).
- Variáveis de decisão
  Forma de definir as soluções ao problema.
- Restrições
  Condições do problema.

# Otimização

Em todo problema que pode ser otimizado podemos definir as componentes:

- Função objetivo
  Critério para avaliar cada solução. Deve ser maximizado (ou minimizado).
- Variáveis de decisão
  Forma de definir as soluções ao problema.
- Restrições
  Condições do problema.
- Solução viável, fatível
  Conjunto de valores das variáveis de decisão (solução) que atende todas as restrições

# Otimização

Em todo problema que pode ser otimizado podemos definir as componentes:

- Função objetivo
  Critério para avaliar cada solução. Deve ser maximizado (ou minimizado).
- Variáveis de decisão
  Forma de definir as soluções ao problema.
- Restrições
  Condições do problema.
- Solução viável, fatível
  Conjunto de valores das variáveis de decisão (solução) que atende todas as restrições
- Solução ótima
  A solução viável que atende da melhor forma possível o objetivo

# Otimização

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$
$$\text{sujeito às restrições: } g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$$
$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$f(X)$, $g_j(X)$ e $h_j(X)$ são funções escalares do vetor coluna real $X$.

# Otimização

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sujeito às restrições: } g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$$

$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$x_i$: variáveis de decisão

# Otimização

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sujeito às restrições: } g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$$

$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$x_i$: variáveis de decisão

$X$: uma solução

# Otimização

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sujeito às restrições: } g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$$

$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$x_i$: variáveis de decisão
$X$: uma solução
$f(X)$: função objetivo

# Otimização

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sujeito às restrições: } g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$$

$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$x_i$: variáveis de decisão

$X$: uma solução

$f(X)$: função objetivo

$g_j(X)$: funções de restrição de desigualdade. $m \geq 0$

# Otimização

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sujeito às restrições: } g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$$

$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$x_i$: variáveis de decisão

$X$: uma solução

$f(X)$: função objetivo

$g_j(X)$: funções de restrição de desigualdade. $m \geq 0$

$h_j(X)$: funções de restrição de igualdade. $r \geq 0$

# Otimização

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sujeito às restrições: } g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$$

$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$x_i$: variáveis de decisão
$X$: uma solução
$f(X)$: função objetivo
$g_j(X)$: funções de restrição de desigualdade. $m \geq 0$
$h_j(X)$: funções de restrição de igualdade. $r \geq 0$
Solução factível: restrições atendidas. Região factível: conjunto.

# Otimização

$$\text{minimizar} f(X), \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$
$$\text{sujeito às restrições: } g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, ..., m$$
$$h_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., r$$

$x_i$: variáveis de decisão
$X$: uma solução
$f(X)$: função objetivo
$g_j(X)$: funções de restrição de desigualdade. $m \geq 0$
$h_j(X)$: funções de restrição de igualdade. $r \geq 0$
Solução factível: restrições atendidas. Região factível: conjunto.
$X^*$: solução ótima

# Otimização - Exercício paralelepípedo

- Função objetivo:

# Otimização - Exercício paralelepípedo

- Função objetivo:
- Variáveis de decisão:

# Otimização - Exercício paralelepípedo

- Função objetivo:
- Variáveis de decisão:
- Restrições:

# Otimização - Exercício paralelepípedo

- Função objetivo:
- Variáveis de decisão:
- Restrições:
- Solução viável (exemplo):

# Otimização - Exercício paralelepípedo

- Função objetivo:
- Variáveis de decisão:
- Restrições:
- Solução viável (exemplo):
- Solução ótima:

# Funções objetivo e restrições

Os valores das funções objetivo e restrições para um vetor de variáveis de decisão em particular podem ser obtidos de diferentes formas:

- Formula analítica conhecida
  $f(X) = x_1^2 + x_2^3 + sen(x_1 + x_2)$

# Funções objetivo e restrições

Os valores das funções objetivo e restrições para um vetor de variáveis de decisão em particular podem ser obtidos de diferentes formas:

- Formula analítica conhecida
  $f(X) = x_1^2 + x_2^3 + sen(x_1 + x_2)$
- Saída de um processo de cômputo complexo
  $f(X) = \sum p_i(X)$ onde $p_i(X)$: pressão no ponto $i$ de uma rede quando utilizados os diâmetros $X = [2, 1, 3...]$

# Funções objetivo e restrições

Os valores das funções objetivo e restrições para um vetor de variáveis de decisão em particular podem ser obtidos de diferentes formas:

- Formula analítica conhecida
  $f(X) = x_1^2 + x_2^3 + sen(x_1 + x_2)$
- Saída de um processo de cômputo complexo
  $f(X) = \sum p_i(X)$ onde $p_i(X)$: pressão no ponto $i$ de uma rede quando utilizados os diâmetros $X = [2, 1, 3...]$
- Medições diretas
  Não é comum, mas pode também ser utilizado.

# Adaptação do problema à forma padrão

Claramente, os problemas práticos não começam com uma formulação como a anterior, pelo qual é necessário fazer deles uma interpretação criteriosa. São comuns alterações do tipo de otimização e do tipo de restrições.

- Maximização

$$\max f(X) = -\min\{-f(X)\} = -\min F(X) \tag{1}$$

Definindo $F(X) = -f(X)$, resolver o problema $\min F(X)$. A $X^*$ obtido é a solução do problema original, e o valor $-F(X^*) = f(X^*)$ é o máximo atingido.
As restrições não se alteram por esse motivo.

# Adaptação do problema à forma padrão

Claramente, os problemas práticos não começam com uma formulação como a anterior, pelo qual é necessário fazer deles uma interpretação criteriosa. São comuns alterações do tipo de otimização e do tipo de restrições.

- Maximização

$$\mathrm{max} f(X) = -\mathrm{min}\{-f(X)\} = -\mathrm{min} F(X) \tag{1}$$

- Restrições de $\geq 0$

$$\text{s.a: } g(X) \geq 0 \rightarrow \text{ s.a: } \tilde{g}(X) \text{ com } \tilde{g}(X) = -g(X) \tag{2}$$

O mesmo tipo de tratamento pode ser dado às restrições de desigualdade.
Em nenhum dos casos a mudança é só no X!

# Adaptação do problema à forma padrão

Claramente, os problemas práticos não começam com uma formulação como a anterior, pelo qual é necessário fazer deles uma interpretação criteriosa. São comuns alterações do tipo de otimização e do tipo de restrições.

- Maximização

$$\max f(X) = -\min\{-f(X)\} = -\min F(X) \tag{1}$$

- Restrições de $\geq 0$

$$\text{s.a: } g(X) \geq 0 \rightarrow \text{s.a: } \tilde{g}(X) \, \text{com} \, \tilde{g}(X) = -g(X) \tag{2}$$

- Padronização das variáveis de decisão
  Cuidado quando dentre as variáveis de decisão há unidades muito diversas, com ordens de grandeza diferentes!

# Exercício

Produtos A e B, quando o preço unitário aumenta, a quantidade de vendas diminui, segundo:

$$Quantidade_A = 8 - Preco_A$$
$$Quantidade_B = 6 - 1.5Preco_B$$

a) Formalize o problema para obter o maior ingresso por vendas nas condições anteriores, adequando à forma padrão.

# Exercício

Produtos A e B, quando o preço unitário aumenta, a quantidade de vendas diminui, segundo:

$$Quantidade_A = 8 - Preco_A$$
$$Quantidade_B = 6 - 1.5Preco_B$$

b) Suponha que, adicionalmente, limitações de logística impedem movimentar mais do que 10 unidades de produtos na semana (independente do tipo). Reescreva o problema de otimização, adequado à forma padrão, também para aumentar o ingresso por vendas.

# Exercício

Produtos A e B, quando o preço unitário aumenta, a quantidade de vendas diminui, segundo:

$$Quantidade_A = 8 - Preco_A$$
$$Quantidade_B = 6 - 1.5Preco_B$$

c) Considere , além do enunciado original, que a quantidade de água usada para cada unidade de A é de $20m^3$ e para cada unidade de B é de $40m^3$. Se a outorga de água para a empresa limita o consumo semanal a $100m^3$ na semana, reescreva o problema de otimização do ingresso.

# Exercício

a) Existe uma área de 100 ha que poderia ser irrigada. Nela, vai ser implantada uma cultura de milho e outra de feijão, cada uma com diferente receita e com diferente consumo hídrico (abaixo)
Milho: consumo $3.0 dam^3/ha$, receita $100\$R/ha$
Feijão: consumo $1.5 dam^3/ha$, receita $80\$R/ha$
Formule o problema de otimização para definir área a ser implantada com cada cultura visando aumentar a receita.

# Exercício

a) Existe uma área de 100 ha que poderia ser irrigada. Nela, vai ser implantada uma cultura de milho e outra de feijão, cada uma com diferente receita e com diferente consumo hídrico (abaixo)
Milho: consumo $3.0 dam^3/ha$, receita 100$\$R/ha$
Feijão: consumo $1.5 dam^3/ha$, receita 80$\$R/ha$
Formule o problema de otimização para definir área a ser implantada com cada cultura visando aumentar a receita.

b) Considere que a disponibilidade de água para o período de análise está limitada a $240 dam^3$.

# Exercício

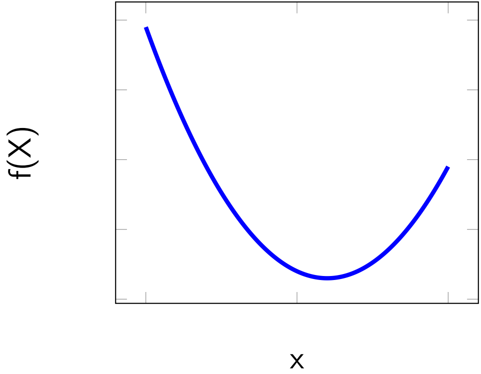
a) Existe uma área de 100 ha que poderia ser irrigada. Nela, vai ser implantada uma cultura de milho e outra de feijão, cada uma com diferente receita e com diferente consumo hídrico (abaixo)
Milho: consumo $3.0 dam^3/ha$, receita 100$\$R/ha$
Feijão: consumo $1.5 dam^3/ha$, receita 80$\$R/ha$
Formule o problema de otimização para definir área a ser implantada com cada cultura visando aumentar a receita.

b) Considere que a disponibilidade de água para o período de análise está limitada a $240 dam^3$.

c) Considere que o uso da água tem custo de $R\$20/dam^3$.

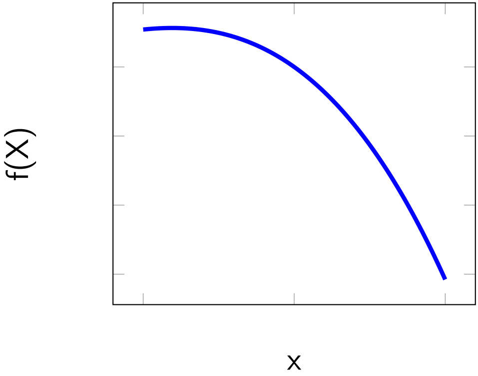
# Representação gráfica

Problema com $X = [x]$ (única variável), sem restrições ($m = r = 0$)
$f(X) = x^2 - 2x + 4$



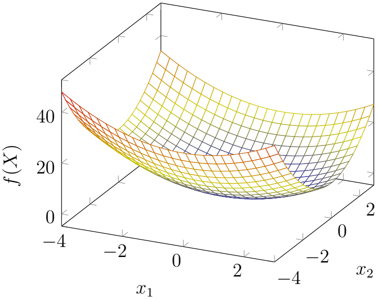
# Representação gráfica

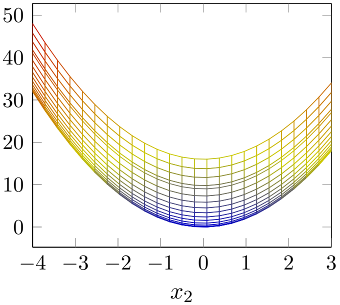
$$f(X) = -4x^3 - 101.4x^2 - 623.7x$$



# Representação gráfica

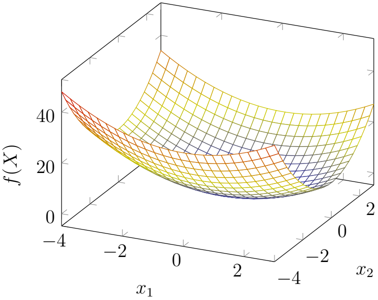
Problema duas variáveis $X = [x_1, x_2]$, sem restrições $(m = r = 0)$
$f(X) = x_1^2 + 2 * x_2^2$

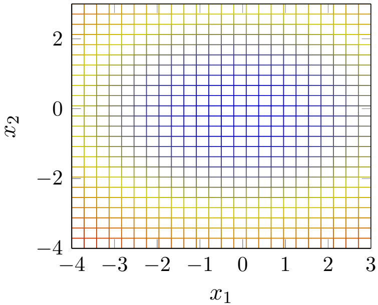


# Representação gráfica

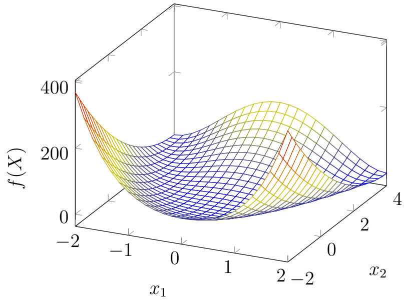
Problema duas variáveis $X = [x_1, x_2]$, sem restrições $(m = r = 0)$
$f(X) = x_1^2 + 2\dot{x}_2^2$

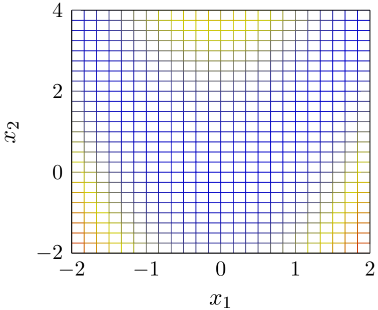


# Representação gráfica

$$f(X) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$



# Representação gráfica

Também as restrições podem ser representadas graficamente:

- Restrições de desigualdade, $g(X)$

# Representação gráfica

Também as restrições podem ser representadas graficamente:

- Restrições de desigualdade, $g(X)$
- Restrições de igualdade, $h(X)$

# Solução do problema

O mínimo da função é um ponto crítico, deve ter o coeficiente angular $= 0$, i.e. cumprir a condição necessária:

$$f'(X) = \frac{df(X)}{dx} = 0$$

Adicionalmente, é necessária a condição de curvatura não negativa, ou condição de segunda ordem:

$$f''(X) = \frac{d^2 f(X)}{dx^2} = 0$$

# Solução do problema

O mínimo da função é um ponto crítico, deve ter o coeficiente angular $= 0$, i.e. cumprir a condição necessária:

$$f'(X) = \frac{df(X)}{dx} = 0$$

Adicionalmente, é necessária a condição de curvatura não negativa, ou condição de segunda ordem:

$$f''(X) = \frac{d^2 f(X)}{dx^2} = 0$$

Se as derivadas de $f(x)$ podem ser calculadas analiticamente, pode ser obtida uma solução 'fechada' do problema.

# Solução do problema

O mínimo da função é um ponto crítico, deve ter o coeficiente angular $= 0$, i.e. cumprir a condição necessária:

$$f'(X) = \frac{df(X)}{dx} = 0$$

Adicionalmente, é necessária a condição de curvatura não negativa, ou condição de segunda ordem:

$$f''(X) = \frac{d^2 f(X)}{dx^2} = 0$$

Se as derivadas de $f(x)$ podem ser calculadas analiticamente, pode ser obtida uma solução 'fechada' do problema.
Usualmente, são necessários métodos numéricos.

# Solução do problema

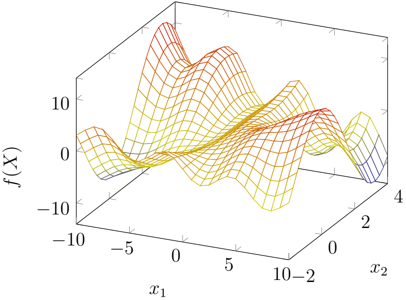
O anterior supondo que não há restrições, que a função realmente tem mínimo, e que ele é único.

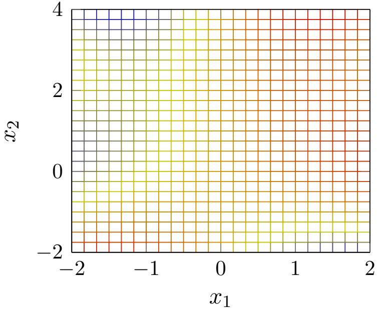
Isso é sempre verdade?

# Solução do problema

O anterior supondo que não há restrições, que a função realmente tem mínimo, e que ele é único.

Isso é sempre verdade?
$f(X) = x_1 cos(x_2) + sen(x_1)$



# Mínimo Local vs. Mínimo Global

As condições anteriores determinam a existência de um **mínimo local**

# Mínimo Local vs. Mínimo Global

As condições anteriores determinam a existência de um **mínimo local**

$X^*$ é um mínimo global no conjunto **X** se:

$$f(X) \geq f(X^*) \quad \forall\, X \in \mathbf{X}$$

# Mínimo Local vs. Mínimo Global

As condições anteriores determinam a existência de um **mínimo local**

$X^*$ é um mínimo global no conjunto **X** se:

$$f(X) \geq f(X^*) \quad \forall\, X \in \mathbf{X}$$

$X^*$ é um mínimo local forte se existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$f(X) > f(X^*) \quad \forall \{X \mid \parallel X - X^* \parallel < \epsilon\}$$

# Classificação dos problemas de otimização

# Classificação dos problemas de otimização

**Segundo existência de restrições**

- Sem restrições (*unconstrained*)
- Com restrições (*constrained*)

# Classificação dos problemas de otimização

**Segundo existência de restrições**

**Segundo quantidade de funções objetivo**

- Objetivo único
- Multi objetivo

# Classificação dos problemas de otimização

**Segundo existência de restrições**

**Segundo quantidade de funções objetivo**

**Segundo dimensionalidade do problema**

- Uma dimensão
- Duas (três?) dimensões
- Múltiplas dimensões

# Classificação dos problemas de otimização

**Segundo existência de restrições**

**Segundo quantidade de funções objetivo**

**Segundo dimensionalidade do problema**

**Segundo natureza probabilística das variáveis**

- Determinística
- Estocástica

# Classificação dos problemas de otimização

**Segundo existência de restrições**

**Segundo quantidade de funções objetivo**

**Segundo dimensionalidade do problema**

**Segundo natureza probabilística das variáveis**

**Segundo tipo das variáveis de decisão**

- Real (continua)
- Inteira (discreta)

# Classificação dos problemas de otimização

**Segundo existência de restrições**

**Segundo quantidade de funções objetivo**

**Segundo dimensionalidade do problema**

**Segundo natureza probabilística das variáveis**

**Segundo tipo das variáveis de decisão**

**Segundo natureza de F. O. e restrições**

- Linear
- Quadrático
- Geométrico
- Não linear

# Classificação dos problemas de otimização

**Segundo existência de restrições**

**Segundo quantidade de funções objetivo**

**Segundo dimensionalidade do problema**

**Segundo natureza probabilística das variáveis**

**Segundo tipo das variáveis de decisão**

**Segundo natureza de F. O. e restrições**

**Segundo funções separáveis, convexas, as variáveis ser funções, sequencialidade, etc.**

# Classificação das técnicas de otimização

As técnicas de otimização são também muito diversas. Não há classificação única.

***Unconstrained Optimization***

- Line Search Methods
- Trust-Region Methods
- Truncated Newton Methods
- Difference Approximations
- Quasi-Newton Methods
- Nonlinear Conjugate Gradient Method
- Nonlinear Simplex Method

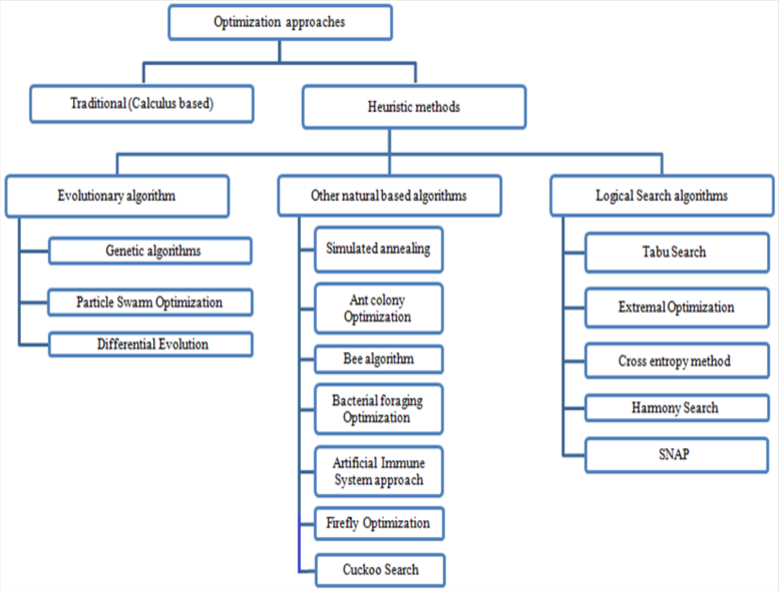
*Related Problems*

- Nonlinear Least-Squares Problems
  - The Gauss Newton Method
  - The Levenberg-Marquardt Method
  - Hybrid Methods
  - Large-Scale Methods
  - Nonlinear Least-Squares Problems with Constraints
- Nonlinear Equations
  - Trust-Region and Line Search Methods
  - Broyden's Method
  - Tensor Methods
  - Homotopy Methods

***Constrained Optimization***

- Bound Constrained Optimization
  - Newton Methods
  - Gradient Projection Methods
- Linear Programming
  - Simplex Method
  - Interior Point Methods
- Quadratic Programming
  - Algorithms for Quadratic Programming
- Nonlinear Programming
  - Augmented Lagrangian Methods
  - Reduced Gradient Methods
  - Sequential Quadratic Programming
  - Feasible Sequential Quadratic Programming
- Semi-infinite Programming
  - Central Cutting Plane Methods
  - Discretization Methods
  - KKT Reduction Methods
  - SQP Reduction Methods

# Classificação das técnicas de otimização



# Classificação das técnicas de otimização

Site interessante:
NEOS-Guide