

Análise Hierarquica de Processos (AHP)

Análise de sistemas

Maria M. Gamboa

2^o Semestre de 2023. 18/08/2023

Método de análise hierárquica (AHP)

Analysis hierarchy process (AHP)

- Thomas L. Saaty, 1970's, Universidade de Pittsburgh

Método de análise hierárquica (AHP)

Analysis hierarchy process (AHP)

- Thomas L. Saaty, 1970's, Universidade de Pittsburgh
- Ferramenta para tomada de decisão, principalmente em grupos e para decisões/escolhas complexas

Método de análise hierárquica (AHP)

Analysis hierarchy process (AHP)

- Thomas L. Saaty, 1970's, Universidade de Pittsburgh
- Ferramenta para tomada de decisão, principalmente em grupos e para decisões/escolhas complexas
- Procura tornar quantitativo o processo de decisão

Método de análise hierárquica (AHP)

Analysis hierarchy process (AHP)

- Thomas L. Saaty, 1970's, Universidade de Pittsburgh
- Ferramenta para tomada de decisão, principalmente em grupos e para decisões/escolhas complexas
- Procura tornar quantitativo o processo de decisão
- Permite usar critérios quantitativos e qualitativos, precisos ou estimados, etc

Método de análise hierárquica (AHP)

Analysis hierarchy process (AHP)

- Thomas L. Saaty, 1970's, Universidade de Pittsburgh
- Ferramenta para tomada de decisão, principalmente em grupos e para decisões/escolhas complexas
- Procura tornar quantitativo o processo de decisão
- Permite usar critérios quantitativos e qualitativos, precisos ou estimados, etc
- Ideia geral: desenvolve prioridade entre alternativas e critérios para julgá-las

Método de análise hierárquica (AHP)

Analysis hierarchy process (AHP)

- Thomas L. Saaty, 1970's, Universidade de Pittsburgh
- Ferramenta para tomada de decisão, principalmente em grupos e para decisões/escolhas complexas
- Procura tornar quantitativo o processo de decisão
- Permite usar critérios quantitativos e qualitativos, precisos ou estimados, etc
- Ideia geral: desenvolve prioridade entre alternativas e critérios para julgá-las
- Formalmente, é uma metodologia de medição relativa

Método de análise hierárquica (AHP)

Analysis hierarchy process (AHP)

- Elementos: Objetivo (1), alternativas (N), critérios (M), e relações entre eles.

Método de análise hierárquica (AHP)

Analysis hierarchy process (AHP)

- Elementos: Objetivo (1), alternativas (N), critérios (M), e relações entre eles.
- Critérios em diferentes escalas, ou sem, não podem ser simplesmente combinados
→ avaliação relativa: priorização

Método de análise hierárquica (AHP)

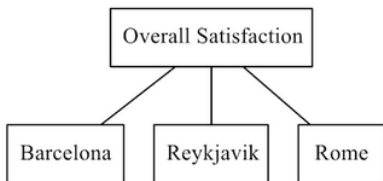
Analysis hierarchy process (AHP)

- Elementos: Objetivo (1), alternativas (N), critérios (M), e relações entre eles.
- Critérios em diferentes escalas, ou sem, não podem ser simplesmente combinados
→ avaliação relativa: priorização
- priorização de critérios segundo a importância para a meta, e do desempenho das alternativas.

Exemplo de Método de análise hierárquica (AHP)

Uma família que mora na Europa vai decidir para qual cidade ir nas férias:

$X = \text{Roma, Barcelona, Reykjavik}$



Exemplo de Método de análise hierárquica (AHP)

Para poder decidir, vão dar pontuação w para cada alternativa.

$$w = (w_1, w_2, w_3)$$

Se: $w_2 > w_1 > w_3 \rightarrow$ Barcelona \succ Roma \succ Reykjavik

Exemplo de Método de análise hierárquica (AHP)

Para poder decidir, vão dar pontuação w para cada alternativa.

$$w = (w_1, w_2, w_3)$$

Se: $w_2 > w_1 > w_3 \rightarrow$ Barcelona \succ Roma \succ Reykjavik

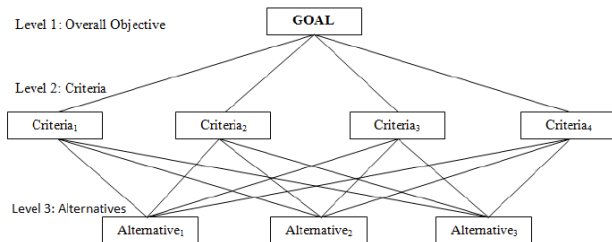
Mas a definição do vetor w não é simples, principalmente se houver muitas alternativas, e se o objetivo não for fácil de avaliar.

Passos do método:

- 1. Estruturação da hierarquia
- 2. Comparações em pares
- 3. Derivação de vetores de prioridade e suas combinações lineares
- 4. Verificar a consistência
- 5. Resultados e conclusões

1. Estruturação da hierarquia

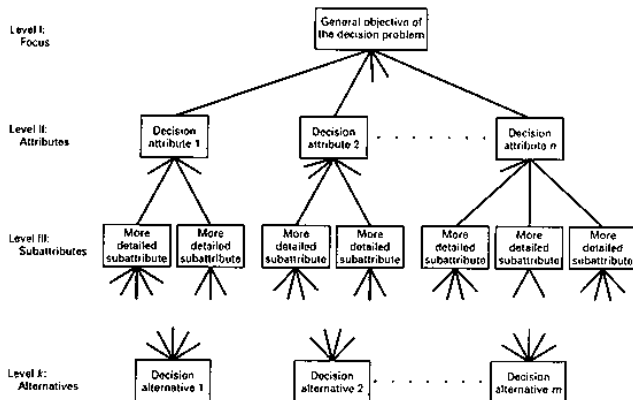
Detalhar os critérios nos quais a decisão será baseada.



Todos os M critérios devem poder ser avaliados para todas as N alternativas

AHP - Passo 1

Se o problema se faz mais complexo, várias camadas de critérios podem ser necessárias.



- Primeira camada: objetivo
- Última camada: alternativas
- Camada(s) intermediária(s): Critérios. Agrupar semelhantes

- Primeira camada: objetivo
- Última camada: alternativas
- Camada(s) intermediária(s): Critérios. Agrupar semelhantes

Todos os critérios da ante-última camada devem poder ser avaliados para cada alternativa

Exemplo AHP - 1

Comparação é possível ao usar critérios.

$$C = c_1, c_2 \dots c_m$$

No exemplo:

C = clima, ambiente, custo

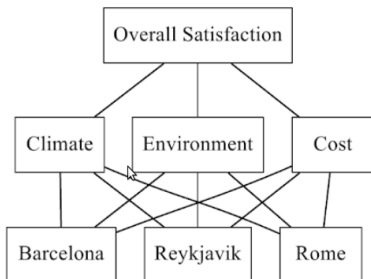
Exemplo AHP - 1

Comparação é possível ao usar critérios.

$$C = c_1, c_2 \dots c_m$$

No exemplo:

C = clima, ambiente, custo



Sendo as alternativas $X = x_1, x_2, \dots, x_N$ Preferência define pontuação w_i para cada alternativa i .

$$\hat{W} = \hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_N^T$$

Sendo as alternativas $X = x_1, x_2, \dots, x_N$ Preferência define pontuação w_i para cada alternativa i .

$$\hat{W} = \hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_N^T$$

Isso segundo cada um dos M critérios

$$w_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,M})$$

Sendo as alternativas $X = x_1, x_2, \dots, x_N$ Preferência define pontuação w_i para cada alternativa i .

$$\hat{W} = \hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_N^T$$

Isso segundo cada um dos M critérios

$$w_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,M})$$

Mas a definição do vetor \hat{W} não é simples, principalmente se houver muitas alternativas.

Muito mais fácil estabelecer **Comparações em pares**

AHP - Passo 2. Comparação

Quantificação de valores de cada critério comparando alternativas

- Depende fortemente do problema em questão

Quantificação de valores de cada critério comparando alternativas

- Depende fortemente do problema em questão
- Valores numéricos ou não, são transformados em escalas

Quantificação de valores de cada critério comparando alternativas

- Depende fortemente do problema em questão
- Valores numéricos ou não, são transformados em escalas
- Participação de expertos

Quantificação de valores de cada critério comparando alternativas

- Depende fortemente do problema em questão
- Valores numéricos ou não, são transformados em escalas
- Participação de expertos
- Regra de transformação de valores numéricos, e quantificação dos não-numéricos

Quantificação de valores de cada critério comparando alternativas

- Depende fortemente do problema em questão
- Valores numéricos ou não, são transformados em escalas
- Participação de expertos
- Regra de transformação de valores numéricos, e quantificação dos não-numéricos
- Metodologia para consenso

Quantificação de valores de cada critério comparando alternativas

- Depende fortemente do problema em questão
- Valores numéricos ou não, são transformados em escalas
- Participação de expertos
- Regra de transformação de valores numéricos, e quantificação dos não-numéricos
- Metodologia para consenso
- Segundo cada critério independente: Matriz de avaliações comparativas (ou vetor diretamente).

AHP - Passo 2. Comparação

Quantificação das preferências entre dois critérios

Pessoas conseguimos avaliar só 7 ± 2 opções.

Importante participação de expertos.

AHP - Passo 2. Comparação

Quantificação das preferências entre dois critérios

Pessoas conseguimos avaliar só 7 ± 2 opções.

Importante participação de expertos.

Tabela proposta por Saaty (1977)

Import. rel.	Definição
1	Igualmente importante
3	Moderadamente mais importante (experiencia ou critério pessoal)
5	Fortemente mais importante (experiencia ou critério pessoal)
7	Muito fortemente mais importante (+ provado na prática)
9	Extremamente mais importante (toda evidencia prova)
2,4,5,8	Intermediários, quando necessário
$\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \dots, 1$	Recíproco

AHP - Passo 2. Comparação

Quantificação das preferências entre dois critérios

Pessoas conseguimos avaliar só 7 ± 2 opções.

Importante participação de expertos.

Tabela proposta por Saaty (1977)

Import. rel.	Definição
1	Igualmente importante
3	Moderadamente mais importante (experiencia ou critério pessoal)
5	Fortemente mais importante (experiencia ou critério pessoal)
7	Muito fortemente mais importante (+ provado na prática)
9	Extremamente mais importante (toda evidencia prova)
2,4,5,8	Intermediários, quando necessário
$\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \dots, 1$	Recíproco

Essa escala clássica não é ótima, mas continua a mais usada.

Escalas alternativas: segundo psicologia da tomada de decisão

2. Comparações em pares

Dado um critério, compara a pontuação de i e j : $a_{i,j} \approx \frac{w_i}{w_j}$

$a_{i,j}$: Grau de preferência de x_i acima de x_j .

2. Comparações em pares

Dado um critério, compara a pontuação de i e j : $a_{i,j} \approx \frac{w_i}{w_j}$

$a_{i,j}$: Grau de preferência de x_i acima de x_j .

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{1,1}^k & \dots & a_{1,N}^k \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N,1}^k & \dots & a_{N,N}^k \end{bmatrix}$$

2. Comparações em pares

Dado um critério, compara a pontuação de i e j : $a_{i,j} \approx \frac{w_i}{w_j}$

$a_{i,j}$: Grau de preferência de x_i acima de x_j .

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{1,1}^k & \dots & a_{1,N}^k \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N,1}^k & \dots & a_{N,N}^k \end{bmatrix}$$

Matriz A (para cada critério) tem correspondência triângulo superior com inferior, e $a_{i,i} = 1$

Exemplo de Método de análise hierárquica (AHP)

No exemplo:

$$\mathbf{A}^{(c)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/8 \\ 2 & 1 & 1/4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

AHP - Passo 2. Comparação

De forma semelhante às comparações de alternativas segundo cada critério (A) são comparados os critérios:

AHP - Passo 2. Comparação

De forma semelhante às comparações de alternativas segundo cada critério (A) são comparados os critérios:

Importância relativa dos critérios para atingir o objetivo: matriz B

$$B = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{1,M} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{M,1} & \dots & v_{M,M} \end{bmatrix}$$

Com $v_{i,j}$ = importância relativa do critério i acima do critério j

Exemplo de Método de análise hierárquica (AHP)

No exemplo:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:
 - Cada coluna proporcional às outras

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:
 - Cada coluna proporcional às outras
 - Vetor W calculado normalizando uma coluna

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:
 - Cada coluna proporcional às outras
 - Vetor W calculado normalizando uma coluna
 - W contém toda a informação de A , sem perda

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:
 - Cada coluna proporcional às outras
 - Vetor W calculado normalizando uma coluna
 - W contém toda a informação de A , sem perda
 - Quase nunca acontece na realidade. Comparação não é perfeitamente racional

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:
 - Cada coluna proporcional às outras
 - Vetor W calculado normalizando uma coluna
 - W contém toda a informação de A , sem perda
 - Quase nunca acontece na realidade. Comparação não é perfeitamente racional
- Caso mais geral: A não é exatamente razão de pesos

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:
 - Cada coluna proporcional às outras
 - Vetor W calculado normalizando uma coluna
 - W contém toda a informação de A , sem perda
 - Quase nunca acontece na realidade. Comparação não é perfeitamente racional
- Caso mais geral: A não é exatamente razão de pesos
 - Há perda de informação.

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:
 - Cada coluna proporcional às outras
 - Vetor W calculado normalizando uma coluna
 - W contém toda a informação de A , sem perda
 - Quase nunca acontece na realidade. Comparação não é perfeitamente racional
- Caso mais geral: A não é exatamente razão de pesos
 - Há perda de informação.
 - Necessário escolher o vetor 'ótimo'

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

Após as matrizes de pesos entre os critérios (B) e de avaliação relativa das alternativas (A), é necessário calcular os vetores de prioridade.

- Se $a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$:
 - Cada coluna proporcional às outras
 - Vetor W calculado normalizando uma coluna
 - W contém toda a informação de A , sem perda
 - Quase nunca acontece na realidade. Comparação não é perfeitamente racional
- Caso mais geral: A não é exatamente razão de pesos
 - Há perda de informação.
 - Necessário escolher o vetor 'ótimo'
 - Vários métodos: $\mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

- Caso geral. Métodos:

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

- Caso geral. Métodos:
 - Autovetores

$$AW = \lambda_{max}W$$
$$W^T \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Com λ_{max} máximo autovalor. Se matriz for consistente,
 $\lambda_{max} = N$
É o método mais robusto, o melhor quando a matriz não é
perfeitamente consistente.

AHP - Passo 3. Cálculo de vetores de preferência

- Caso geral. Métodos:

- Autovetores
- Média geométrica

Retorna o vetor W exato se a matriz A for perfeitamente construída pela relação de pesos.

Quando não (sempre), chega numa aproximação consistente. Útil para evitar reversão da ordem.

$$w_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^N a_{i,j}\right)^{1/N}}{\sum_{i=1}^N \left(\prod_{j=1}^N a_{i,j}\right)^{1/N}}$$

- Caso geral. Métodos:
 - Autovetores
 - Média geométrica
 - Padronização de colunas, média simples
Padronizar cada uma das colunas ($\sum = 1$)
Calcular média aritmética de cada linha.
Padronizar e obter w (coluna).
Método mais simples, é usado, mas não tem suporte teórico.

Exemplo AHP-3

No exemplo:

$$\mathbf{w}^{(c)} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}^{(s)} = \begin{pmatrix} 6/10 \\ 3/10 \\ 1/10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}^{(e)} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ 2/11 \\ 8/11 \end{pmatrix}$$

Exemplo AHP-3

No exemplo:

$$\mathbf{w}^{(c)} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}^{(s)} = \begin{pmatrix} 6/10 \\ 3/10 \\ 1/10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}^{(e)} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ 2/11 \\ 8/11 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$$

AHP - Passo 4 Consistência

Se a avaliação for totalmente racional:

$$a_{i,j} = w_i/w_j \forall i, j$$

$$a_{i,k} = a_{ij}a_{jk} \quad \forall i, j, k$$

→ consistente

AHP - Passo 4 Consistência

Se a avaliação for totalmente racional:

$$a_{i,j} = w_i/w_j \forall i, j$$

$$a_{i,k} = a_{ij}a_{jk} \quad \forall i, j, k$$

→ consistente

Índice de consistência:

$$IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

AHP - Passo 4 Consistência

Índice de consistência:

$$IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

Razão de consistência: Se for maior a 10%, não é confiável a avaliação da matriz.

$$RC = \frac{IC}{RI}$$

RI é o índice de aleatoriedade:

<i>n</i>	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>RI_n</i>	0.5247	0.8816	1.1086	1.2479	1.3417	1.4057	1.4499	1.4854

Índice de consistência geométrico:

$$e_{ij} = a_{ij} \frac{w_j}{w_i}$$

$$ICG = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=l+1}^n (\ln(e_{ij}))^2$$

AHP - 5. Resultados

Combinação linear dos vetores de avaliação das alternativas segundo cada critério, e o vetor de peso de cada critério para o objetivo.

$$\hat{W} = v_1W^1 + v_2W^2 + \dots + v_MW^k$$

Sendo \hat{W} o vetor pontuação para as alternativas do vetor X , a(s) melhor(es) alternativa(s) é(ão):

$$x_i \mid \hat{w}_i \geq \hat{w}_j \forall i, j$$

- Inversão da ordem

AHP - Críticas e limitações

- Inversão da ordem
- Diferentes escalas

Aplicação em recursos hídricos: Mapa de risco

AHP na criação de mapa de risco de inundação

- Definir hierarquia

AHP na criação de mapa de risco de inundação

- Definir hierarquia
- Supondo a disponibilidade de todas as informações necessárias integradas a um sistema de informação geográfico (SIG), listar todos os mapas necessários.

AHP na criação de mapa de risco de inundação

- Definir hierarquia
- Supondo a disponibilidade de todas as informações necessárias integradas a um sistema de informação geográfico (SIG), listar todos os mapas necessários.
- Definir forma de tratamento de cada variável

AHP na criação de mapa de risco de inundação

- Definir hierarquia
- Supondo a disponibilidade de todas as informações necessárias integradas a um sistema de informação geográfico (SIG), listar todos os mapas necessários.
- Definir forma de tratamento de cada variável
- Desenhar (vazias) as matrizes de preferência

AHP na criação de mapa de risco de inundação

- Definir hierarquia
- Supondo a disponibilidade de todas as informações necessárias integradas a um sistema de informação geográfico (SIG), listar todos os mapas necessários.
- Definir forma de tratamento de cada variável
- Desenhar (vazias) as matrizes de preferência
- Preencher as matrizes (algumas)

AHP na criação de mapa de risco de inundação

- Definir hierarquia
- Supondo a disponibilidade de todas as informações necessárias integradas a um sistema de informação geográfico (SIG), listar todos os mapas necessários.
- Definir forma de tratamento de cada variável
- Desenhar (vazias) as matrizes de preferência
- Preencher as matrizes (algumas)
- Calcular os vetores

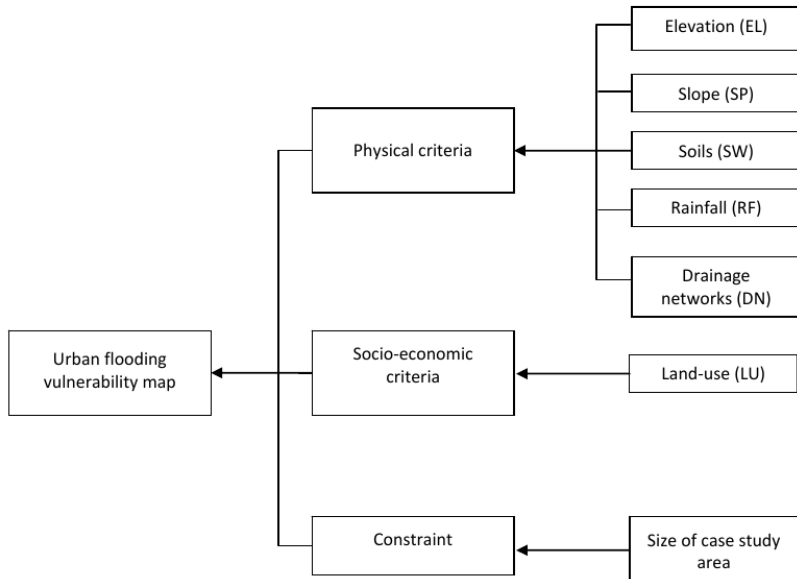
AHP na criação de mapa de risco de inundação

- Definir hierarquia
- Supondo a disponibilidade de todas as informações necessárias integradas a um sistema de informação geográfico (SIG), listar todos os mapas necessários.
- Definir forma de tratamento de cada variável
- Desenhar (vazias) as matrizes de preferência
- Preencher as matrizes (algumas)
- Calcular os vetores
- Avaliar consistência

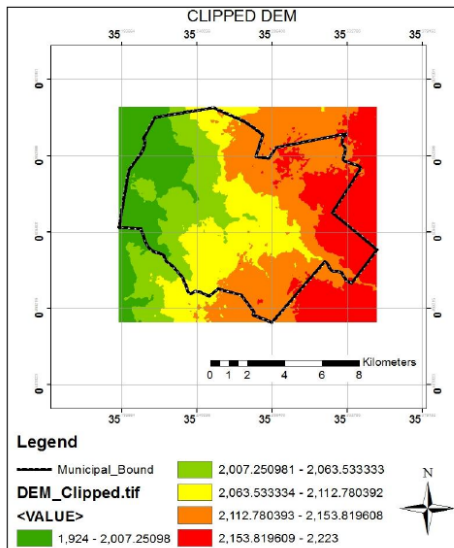
AHP na criação de mapa de risco de inundação

- Definir hierarquia
- Supondo a disponibilidade de todas as informações necessárias integradas a um sistema de informação geográfico (SIG), listar todos os mapas necessários.
- Definir forma de tratamento de cada variável
- Desenhar (vazias) as matrizes de preferência
- Preencher as matrizes (algumas)
- Calcular os vetores
- Avaliar consistência
- Avaliar para uma pequena área no mapa, dar conclusões

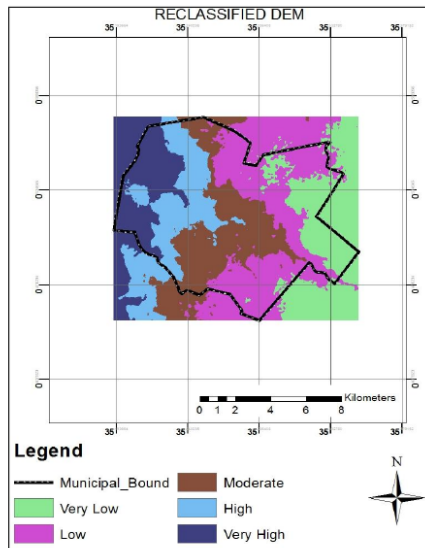
AHP na criação de mapa de risco de inundação



AHP na criação de mapa de risco de inundação

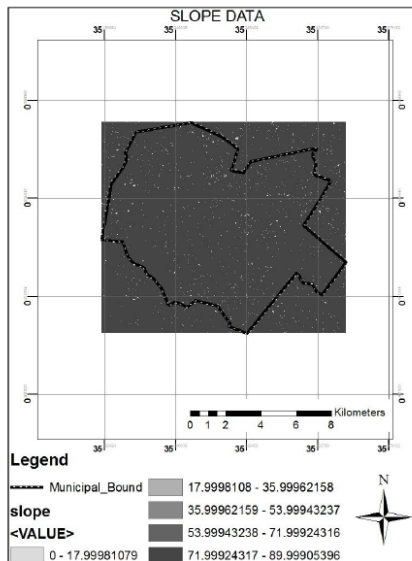


(a)

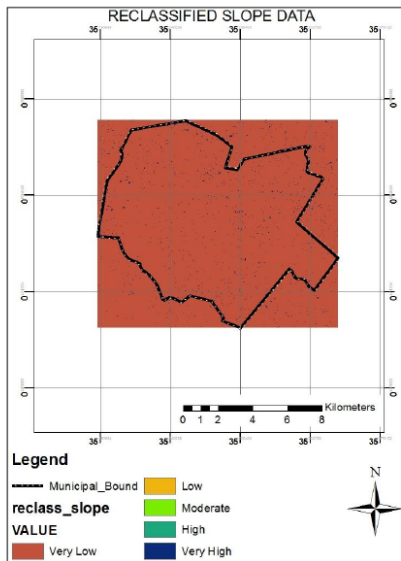


(b)

AHP na criação de mapa de risco de inundação

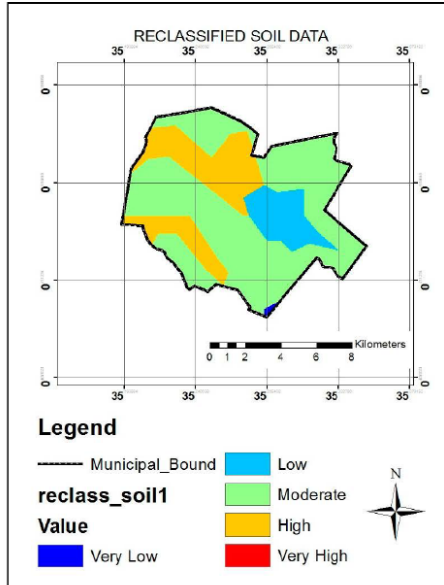
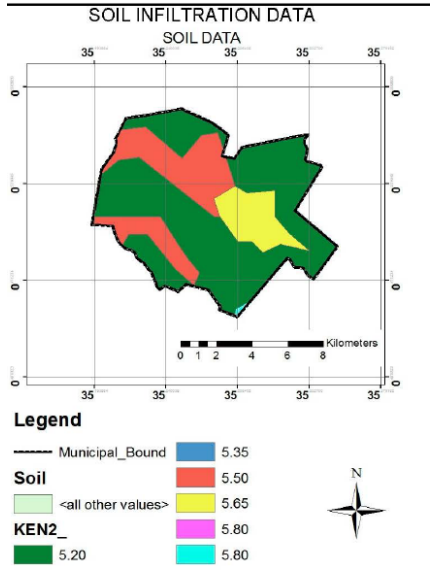


(c)

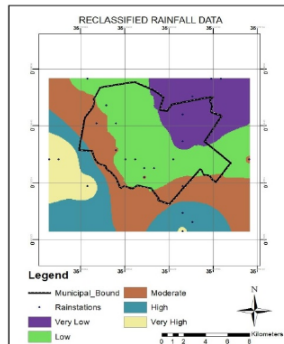
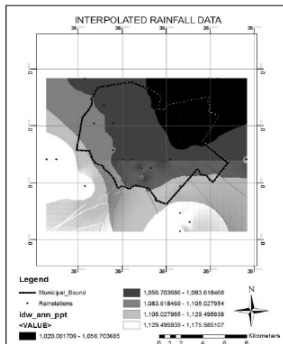
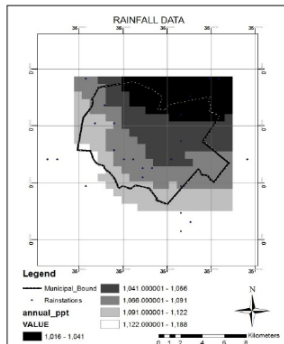


(d)

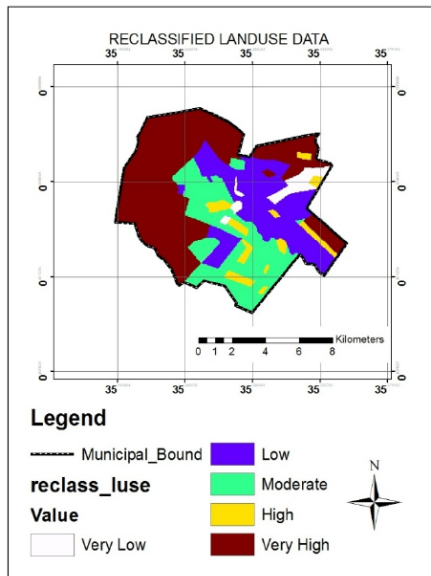
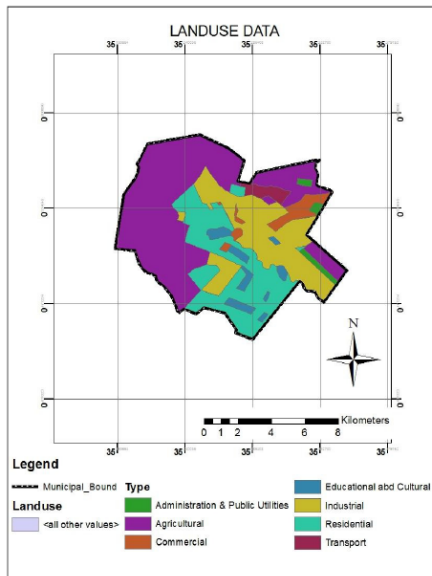
AHP na criação de mapa de risco de inundação



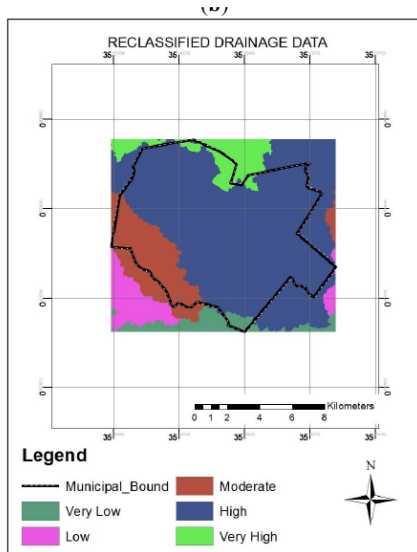
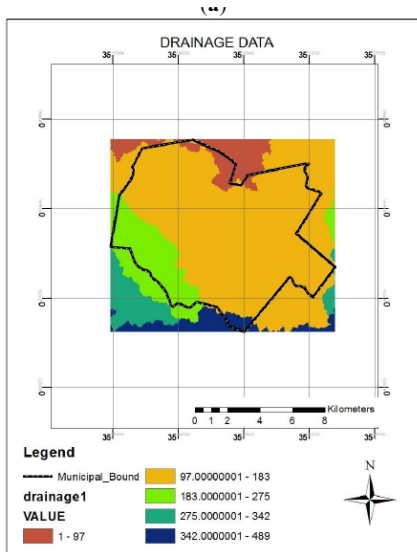
AHP na criação de mapa de risco de inundação



AHP na criação de mapa de risco de inundação



AHP na criação de mapa de risco de inundação



Tomada de decisão - Exercício

Com uma folha de papel A4, crie um paralelepípedo aberto (5 faces) com o maior volume interno possível.

São permitidos cortes, mas todo o paralelepípedo deve estar numa única peça de papel, mantendo sua forma por fita, cola, dobras, etc.