Resumo da aula de 19/10/2023

A matéria da P1, programada para 24/10/2023, será baseada na lista 1 até o exercício 35)
Na quinta-feira, dia 26/10/2023, iniciaremos falando de matriz de uma transf. linear, que na lista 1, inicia no exercício 36)

Exercício 1: (lista 1, ex. 26)
Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 2 a 2 distintos. Prove que $\{e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \ldots, e^{\alpha_n t}\}$ é L. I.

Mostraremos por indução em n.
Para $n=1$, temos que $\{e^{\alpha_1 t}\}$ que claramente é L. I. pois $e^{\alpha_1 t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$
Admitamos o exercício verdadeiro para $n=k$, mostremos que é verdadeiro para $n=k+1$
Sejam $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\beta_1 e^{\alpha_1 t} + \beta_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + \beta_{n+1} e^{\alpha_{n+1} t} = 0, \forall t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Quero mostrar que $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_{n+1} = 0$
Derivando (1) temos que

$$\beta_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + \beta_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + \beta_{n+1} \alpha_{n+1} e^{\alpha_{n+1} t} = 0, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

multiplicando (1) por α_1 e subtraindo (2)

$$\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_2 t} + \cdots + \beta_{n+1}(\alpha_1 - \alpha_{n+1}) e^{\alpha_{n+1} t} = 0$$

Pela hipótese de indução:

$$\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \ldots, \beta_{n+1}(\alpha_1 - \alpha_{n+1}) = 0$$

Como $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ são 2 a 2 distintos, então $\beta_2 = 0, \ldots, \beta_{n+1} = 0$. Substituindo em ①, $\beta_1 = 0$.

Exercício 2: (Lista 1, ex. 29 (b))
Verifique se são operadores lineares do espaço vetorial $P_n(\mathbb{R})$.

(b) $F(f(t)) = f'(t) + t^2 f''(t)$

Lembrando que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$
$= \{0\} \cup \{f \mid f \text{ polinômio}, f \neq 0, \text{grau } f \leq n\}$

(1) $F(f(t)+g(t)) = (f(t)+g(t))' + t^2 (f(t)+g(t))''$

$= f'(t) + g'(t) + t^2 (f''(t) + g''(t)) =$

$= f'(t) + t^2 f''(t) + g'(t) + t^2 g''(t)$

$= F(f(t)) + F(g(t))$

(2) $F(\alpha f(t)) = (\alpha f(t))' + t^2 (\alpha f(t))''$

$= \alpha f'(t) + t^2 (\alpha f''(t)) =$

$= \alpha (f'(t) + t^2 f''(t)) = \alpha F(f(t))$.

$\therefore$ F é um operador linear de $P_n(\mathbb{R})$

Lembrando: Um operador F de um espaço vetorial U, é uma transf. linear $F: U \to U$.

Exercício 3: Determine um operador linear do $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado por $\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1)\}$ e a imagem por $\{(1,0,1,0), (1,1,-1,-1)\}$.

Lembrando: Sejam U um K-espaço de dimensão finita n e $\mathcal{B} \subset U$ com n vetores. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathcal{B}$ é base de U;

(ii) $\mathcal{B}$ é L.I.;

(iii) $\mathcal{B}$ gera U.

OBS: 1) Para $\mathcal{B}$ ser base de U, $\mathcal{B}$ tem que ser L.I. e gerar U, mas se sei que $\dim_K U = n$ e $\mathcal{B}$ tem n vetores, então L.I. e gerar são equivalentes

2) Sejam $u_1, u_2, \dots, u_m \in U$ então

$$[u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m] = [u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_m]$$

$$[u_1, \dots, u_i \dots, u_m] = [u_1, \dots, \alpha u_i \dots, u_m] \ \forall \alpha \neq 0$$

$$[u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m] = [u_1, \dots, u_i, \dots, \alpha u_i + u_j, \dots, u_m], \ \forall \alpha$$

(são chamadas de operações elementares)

3) $\{u, v\}$ é L.D. $\iff \exists \lambda \in K$ tq. $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$

Voltando ao exercício: Da obs 3) claramente

$\mathcal{B} = \{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1)\}$ é L.I.

Pelo Teorema do completamento, podemos completar $\mathcal{B}$ para uma base do $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 1 1 1

$\Longrightarrow \{(1,1,1,1), (0,-2,0,-2), e_3, e_4\}$ é L.I, como têm

4 vetores e $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, então é base do $\mathbb{R}^4$

Pela OBS 2, temos que

$\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1), e_3, e_4\}$ é uma base do $\mathbb{R}^4$,

pois $[(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),e_3,e_4] = [(1,1,1,1),(0,-2,0,-2),e_3,e_4]$

Definimos $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ por

$$\begin{cases} T(1,1,1,1) = (0,0,0,0) \\ T(1,-1,1,-1) = (0,0,0,0) \\ T(e_3) = (1,0,1,0) \\ T(e_4) = (1,1,-1,-1) \end{cases}$$

Pois $\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$ geram o

$\ker(T) = \{u \in \mathbb{R}^4 / T(u) = 0\}$ e

$\{(1,0,1,0),(1,1,-1,-1)\}$ geram a $Im(T)$

Determinemos $T(x,y,z,t)$

Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$(x,y,z,t) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,-1,1,-1) + \gamma e_3 + \delta e_4$

α, β, γ e δ existem e são únicos, pois

$\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1), e_3, e_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$

Assim, $\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \\ \alpha - \beta + \delta = t \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \dfrac{x+y}{2}, \quad \beta = \dfrac{x-y}{2}$

$\left.\begin{matrix} \alpha + \beta + \gamma = z \\ \alpha - \beta + \delta = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma = -x + z, \quad \delta = -y + t$

$$(x,y,z,t) = \frac{x+y}{2}(1,1,1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1,1,-1) + (-x+z)e_3 + (-y+t)e_4$$

$$T(x,y,z,t) = \frac{x+y}{2}T(1,1,1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1,1,-1) + (-x+z)T(e_3) + (-y+t)T(e_4)$$

$$\Longrightarrow T(x,y,z,t) = (-x+z-y+t, -y+t, -x+z+y-t, -y+t).$$