Espaços Vetoriais

Def. Um conjunto $V \neq \emptyset$ tem duas operações: adição $+$ e multiplicação por escalar $\cdot$, escalar é $\alpha \in \mathbb{K}$. Então V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ se

i) $u, v \in V \Rightarrow u+v \in V$

ii) $u \in V,\ \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha u \in V$

iii) $u+v = v+u$

iv) $u+(v+w) = (u+v)+w$

v) $\exists\, 0 \in V$ tal que $u+0 = 0+u = u \quad \forall u \in V$

↳ Ex: $0 \in \mathbb{R}$, $0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$,

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

vi) $\exists\, 1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \cdot v = v \cdot 1 = v \in V$

$\hookrightarrow$ em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$

vii) $\forall v \in V$, $\exists\, w \in V$ tal que $v + w = 0$

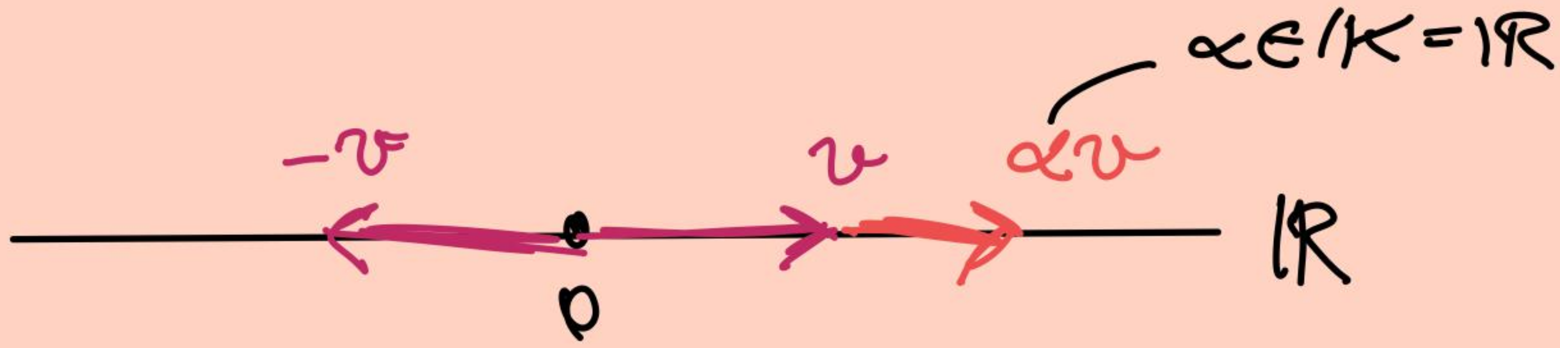
$$\Downarrow$$

$$v = -w$$

viii) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$

$\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$ para $v, u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$

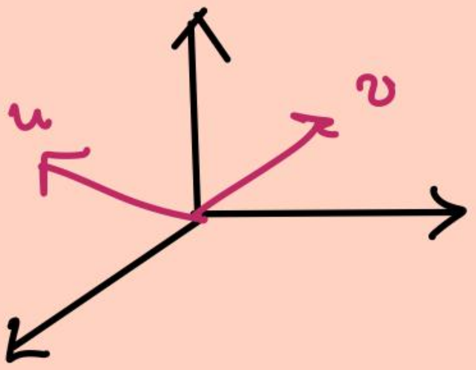
Exemplos:



$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \Rightarrow \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$

$\bar{1} + \bar{2} = 0$



$\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$ só é corpo se $n = 1, 2$

$\mathbb{R}^2 \ni (a, b) \approx a + bi \in \mathbb{C}$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\alpha = 2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2$

$v \in V \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

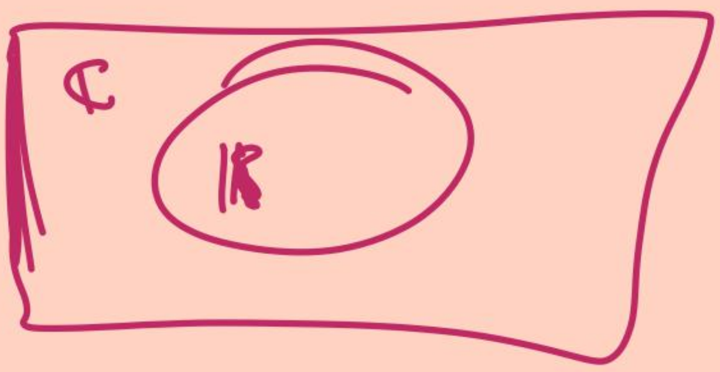
$\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$+: \; u + v = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}$

$\cdot: \; \alpha v = \begin{pmatrix} (a+b)x \\ (a+b)y \\ (a+b)z \end{pmatrix}$ [talvez não funcione, porque $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ não funcione]

isomórficos, "iguais" em certo sentido

$V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$



$\alpha = i \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^3$

$V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ $\operatorname{sen} x,\ e^x,\ x^2, \ldots$

$+: \; f, g \in V \Rightarrow f + g \in V$

$\cdot: \; \alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in V \rightarrow \alpha f \in V$

$\operatorname{sen} x \in V, \quad \operatorname{sen} x + \cos x \in V, \quad 3 \cos x \in V$

α

Perguntinhas:

- Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se $v \in V$ e $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, então vale?

$$nv = \underbrace{(v + v + \dots + v)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ vezes}} \Rightarrow nv = (1 + \dots + 1)v = v + v + \dots + v$$

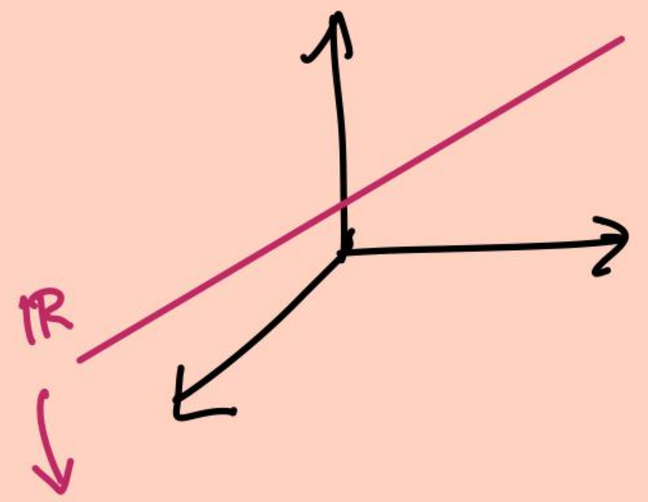
- Sejam V_1, V_2 esp. vetoriais sobre $\mathbb{K}$, conseguimos definir $V = V_1 \times V_2$, ou seja, $\vec{v} = (v_x, v_y) \in V$?

$\oplus$ $\vec{v_1} + \vec{v_2} = (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y})$

$\odot$ $\alpha \vec{v} = (\alpha v_x, \alpha v_y)$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$



$\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial

Subespaços vetoriais

Def. Um conjunto $A \subset V$ vai ser um subespaço de V se também for um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

↳ Ex: $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$A = \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$A \subset V$, A é subespaço

$v = 2x^3$, $u = 5x^3 + x^2$, $\alpha = 2$

$\alpha v = 4x^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

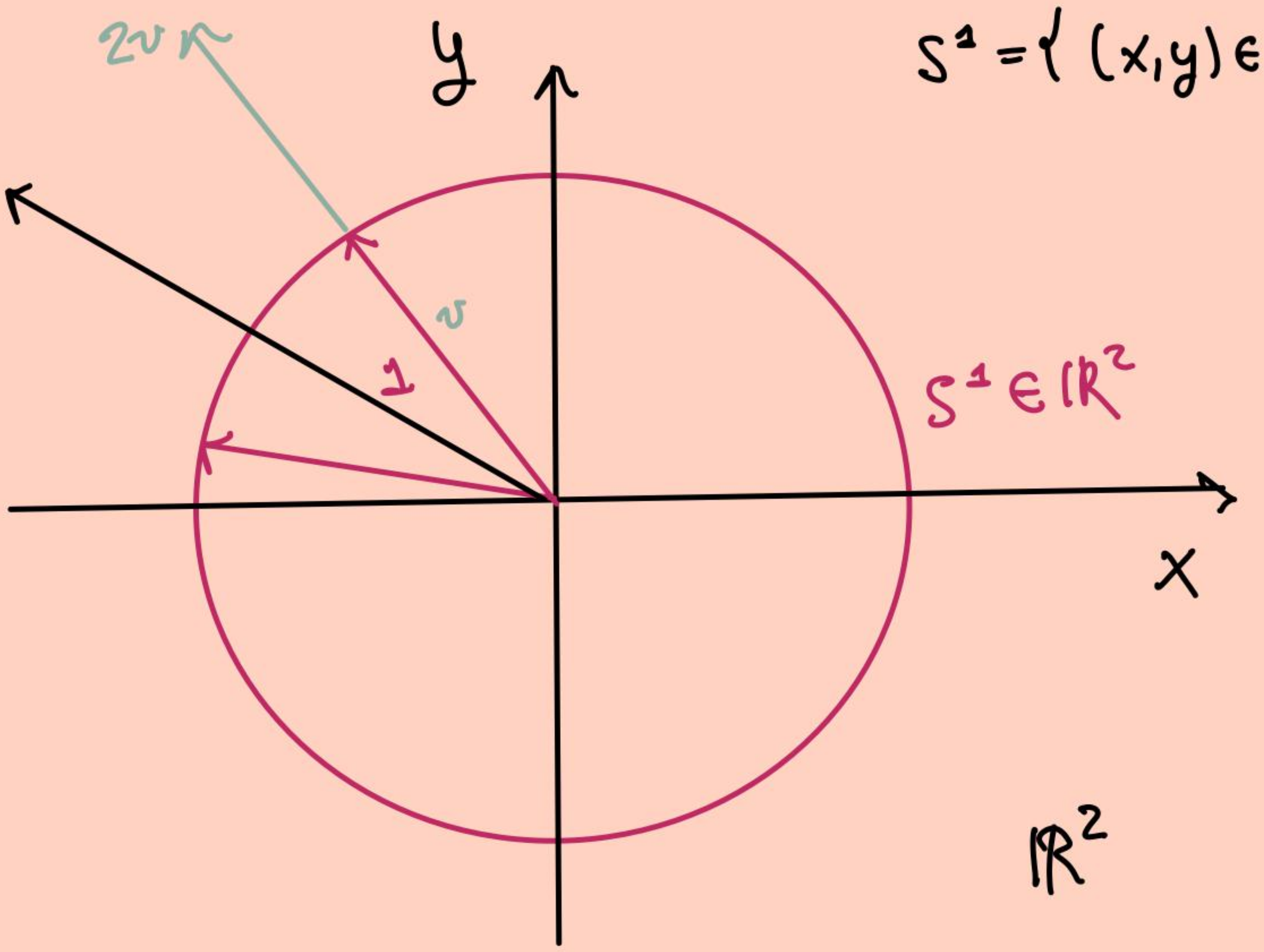
$v + u = 2x^3 + 5x^3 + x^2 = 7x^3 + x^2 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

se $a = b = c = d = 0$, então $v = 0 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$B = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$? Sim, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

O espaço de todos os polinômios, para qualquer grau, $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$S^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$



Subespaços — Critérios suficientes e necessárias

Seja $U \subset V$ para V espaço vetorial

1. $\vec{0}_V \in U$

2. $\forall u, v \in U$, vale que $u + v \in U$

3. $\forall u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, vale que $\alpha u \in U$

pq não, sei lá, $u + v = v + u$? $u + v \in U \subset V \Rightarrow u + v \in V$

$v + u \in U \subset V \Rightarrow v + u \in V$

$(v + u = u + v)$ em $V \Rightarrow (v + u = u + v)$ em U também

Exercícios

- Quais subconjuntos formam subespaços?

① $X \subset \mathbb{R}^3$. $v = (x, y, z) \in X$ para $x = 2y$ e $z = 3x$

$\Rightarrow \quad v = (2y, y, 3x) = (2y, y, 3(2y)) = (2y, y, 6y)$

① $\exists 0 \in X$?

$v = (0,0,0)$? Se $y = 0$, $v = (2.0, 0, 6.0) = (0,0,0) = \vec{0}$

② $u + v \in X$?

$v = (2y, y, 6y)$ e $u = (2y', y', 6y')$

$u + v = (2(y+y'), \underbrace{y+y'}_{Y}, 6(y+y')) = (2Y, Y, 6Y) \in X$

③ $\alpha v \in X$?

$\alpha v = (2\alpha y, \underbrace{\alpha y}_{Y}, 6\alpha y) = (2Y, Y, 6Y) \in X$

② Façam! $A \subset \mathbb{R}^3$ com $v = (x, y, z) \in A$ tal que $xy = 0$. Se houver dúvidas ou quiserem corrigir, é só me mandar :)

Bases Vetoriais

Ex: Base canônica do $\mathbb{R}^n$

$$B = \{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

Base para o conjunto dos polinômios de grau n?

$$p(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + m \cdot 1$$

O que seria uma base para $\mathbb{P}(\mathbb{R})$?

Def. Uma base é um subconjunto de um espaço vetorial $B \subset V$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ tal que:

i) B é um conjunto gerador de V

ii) B é linearmente independente (li)

O que é li? $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in V$ é li se e somente se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

for verdade apenas para $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

O que é um conjunto gerador? $\{v_1, \dots, v_n, \dots\} \subset V$ tal que qualquer $v \in V$ vai ser obtido a partir de uma combinação linear de n (finito) de coeficientes α_i e vetores v_i:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

De volta às perguntas...

① Uma base para $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

$$p_0 = 1, \quad p_0' = 2 \cdot 1$$

$$p_1 = x, \quad p_1' = 5x, \quad p_1'' = \frac{3}{\sqrt{5}} x$$

$$p_2 = x^2, \quad p_3 = 42x^3 + 5x^2$$

$$B \text{ para } P_2(\mathbb{R}) = \{1, x, x^2\} \qquad \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 \cdot 1 = p_3(x)$$

$$B \text{ para } P_n(\mathbb{R}) = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\}$$

dim B = # presentes na base

$$\dim(B \text{ para } P_2(\mathbb{R})) = 3$$

$$\dim(B \text{ para } P_n(\mathbb{R})) = n+1$$

$$\dim(B \text{ para } \mathbb{R}^n) = n$$

dim V = # vetores de suas bases B,

quaisquer que sejam

② Para $P(\mathbb{R})$?

$$B = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n, x^{n+1}, \dots\}$$

a base é infinita, mas os polinômios têm grau finito, então B ainda é conjunto gerador de $P(\mathbb{R})$.

$$\dim B = \infty$$