Integração

23,24,26/out/23

Integração

Vamos agora começar a discutir integração sistematicamente. Antes mesmo de dizer que a integral de uma função é a área entre o eixo horizontal e o gráfico da função (pelo menos, quando esse gráfico está acima do eixo horizontal), vejamos algumas definições que usaremos com frequência daqui para frente.

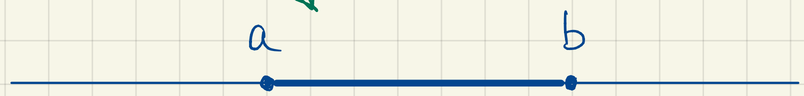
- A "reta real" é o corpo ordenado $\mathbb{R}$ dos números reais.
- O intervalo $[a,b]$, onde $a < b$ são números reais é

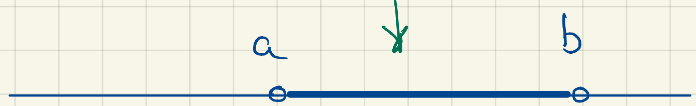
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Esse é um intervalo fechado, pois contém os extremos $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

- Há também o intervalo aberto

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$





- E há também os intervalos

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{e} \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

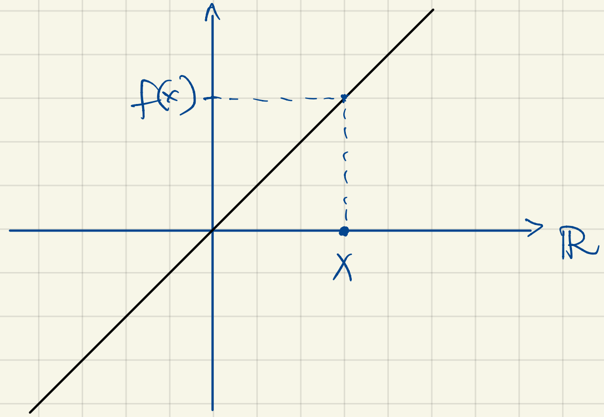
- Uma função real $f : [a,b] \xrightarrow{\text{ou } \mathbb{R} \text{ ou } (a,b) \text{ ou } \dots} \mathbb{R}$ é uma "regra" que associa a cada número $x \in [a,b]$ um (único) número real denotado por $f(x) \in \mathbb{R}$.

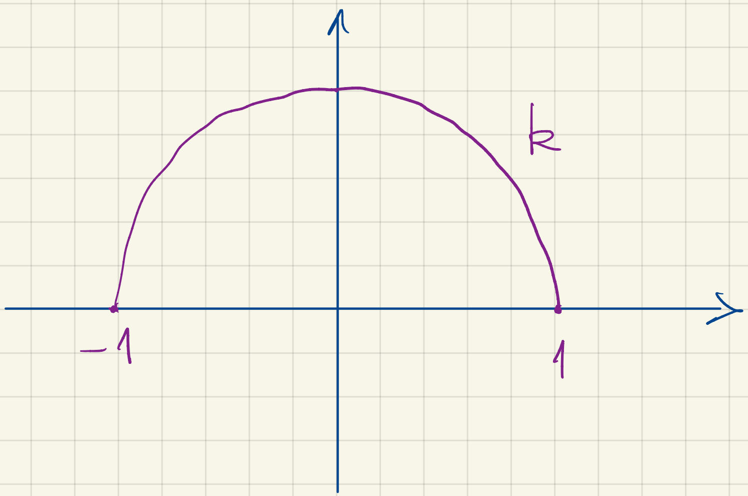
Exemplos: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

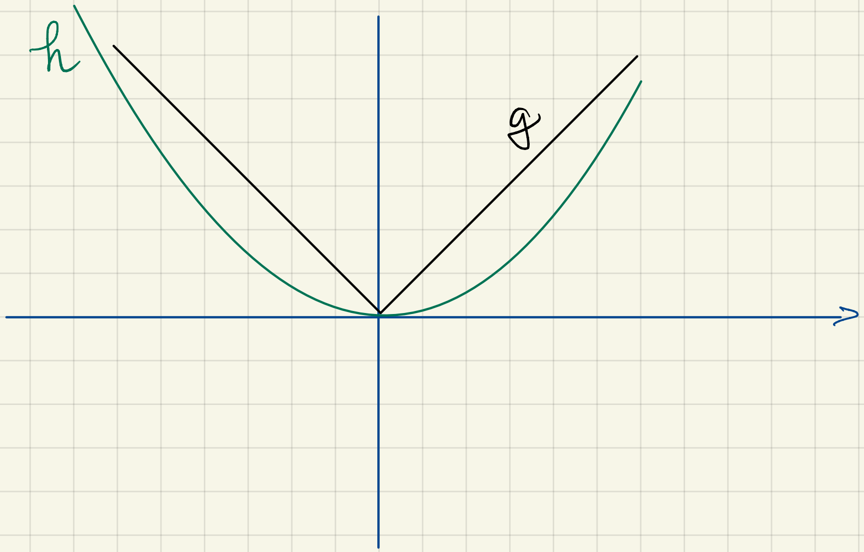
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$

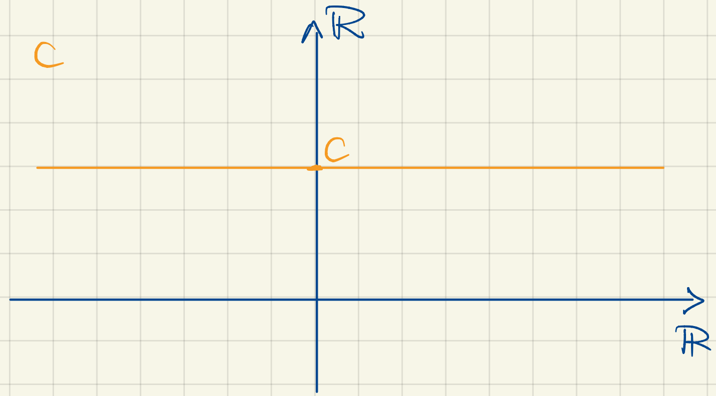
$k : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $k(x) = \sqrt{1-x^2}$







- **Exemplo:** A função constante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$



- Há, claro, um sem número de funções. Divirta-se com Desmos pedindo que ele plote o gráfico de algo como

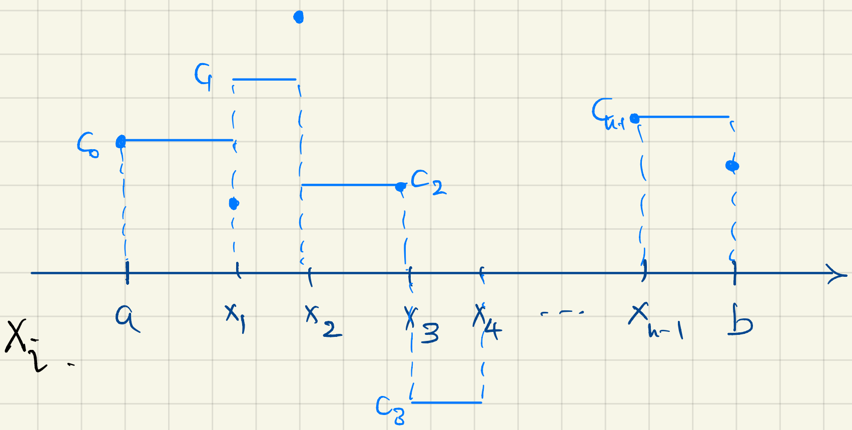
$$f(x) = \frac{\left(\tan \sqrt{x}/(x^2+1)\right)^{1/2} - 128x^3 + 17\cos x^{17}}{\sin\left(\cos\left(x^3 - x^4 + 127x^2\right)\right) - \log|28x+5|}$$

- Uma função escada ou função degrau é uma função que é constante em vários pedacinhos. Mais precisamente, no intervalo $[a,b]$ temos

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

e números $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$, e

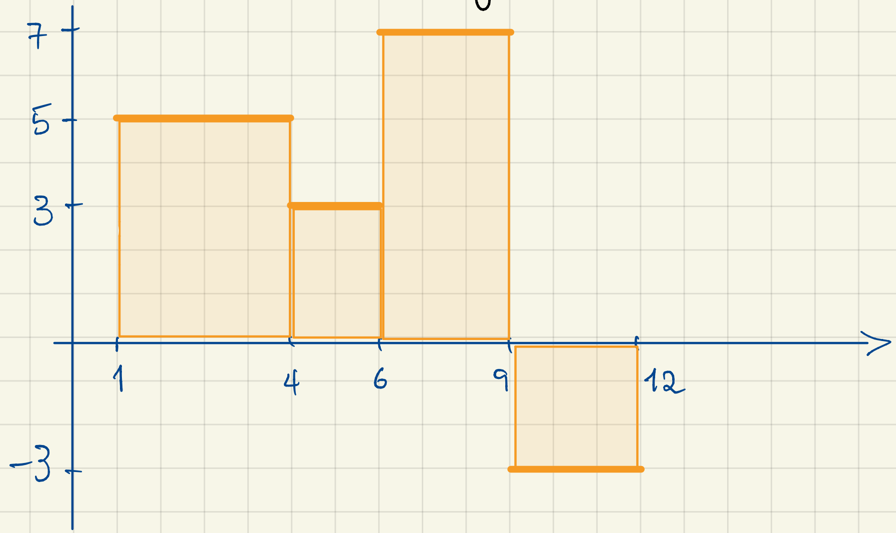
$$f(x) = c_i \quad \text{se} \quad x \in (x_{i-1}, x_i)$$



Obs: Deveríamos, para que f esteja realmente definida, especificar o que acontece nos pontos x_i.

A integral de uma função degrau é a área "abaixo" do gráfico, entre o gráfico e o eixo das abscissas (eixo horizontal). Se o gráfico está abaixo do eixo horizontal, isto é, se os valores da função são negativos, a integral também é a área entre o gráfico e o eixo horizontal, mas com sinal negativo.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})}$$



No exemplo ao lado

$$\int_1^{12} f(x)\,dx = 5\cdot(4-1) + 3\cdot(6-4) + 7\cdot(9-6) + (-3)\cdot(12-9) = \underline{\ \ ?\ \ }$$

Obs: Note que, como estamos interessados em áreas, não faz diferença quais os valores da função nos extremos dos intervalos: isso não afeta a área.

Dadas duas funções definidas no mesmo intervalo, podemos fazer operações algébricas com elas. Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, podemos definir

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x).$$

$$f/g : [a,b] \setminus \{x : g(x)=0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)\ ,\ \text{desde que } g(x) \neq 0.$$

Se as funções são funções degrau definidas em intervalos com a mesma partição (isto é, subdivididos nos mesmos pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$), então as operações acima são super-simples: se $\begin{cases} f(x) = c_i \\ g(x) = d_i \end{cases}$ se $x \in [x_{i-1}, x_i]$

então $\begin{aligned} f+g(x) &= c_i + d_i \\ f\cdot g(x) &= c_i \cdot d_i \end{aligned}$ em $[x_{i-1}, x_i]$, etc.

Outra operação que podemos fazer com funções é multiplicá-las por um número $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

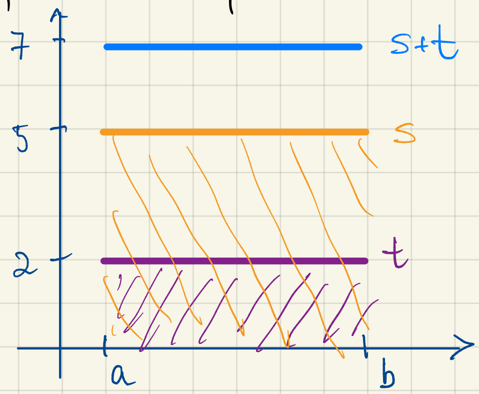
Exercício: Use Desmos para ver o que acontece com gráficos de funções sob as operações acima.

Teorema: Sejam $s, t : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções escada. Então

$$\int_a^b (s+t)(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx + \int_a^b t(x)\,dx$$

Prova: Vamos nos mirar no exemplo de Jack, o estripador, e fazer as coisas por partes.

Suponha primeiro que s e t sejam funções constantes, por exemplo $s(x) = 5$ e $t(x) = 2$ e estamos no intervalo $[a,b]$.



Falando de áreas, a área abaixo do gráfico de s é $5 \cdot (b-a)$, a área abaixo do gráfico de t é $2 \cdot (b-a)$.

A soma das duas áreas é $5 \cdot (b-a) + 2 \cdot (b-a) = 7 \cdot (b-a)$.

Por outro lado, a soma das duas funções $s+t$ é a função constante igual a $5+2=7$, no intervalo $[a,b]$. A área abaixo do gráfico de $s+t$, portanto, é $7\cdot(b-a)$. Assim, temos

$$\int_a^b s(x)\,dx + \int_a^b t(x)\,dx = 5\cdot(b-a) + 2\cdot(b-a)$$

$$= 7\cdot(b-a) = \int_a^b (s+t)(x)\,dx.$$

Agora suponhamos que s,t sejam constantes nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, onde $s(x)=s_i$ e $t(x)=t_i$ se $x\in[x_{i-1},x_i]$. Nesse caso, como vimos $(s+t)(x)=s_i+t_i$ se $x\in[x_{i-1},x_i]$. Portanto,

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{i=1}^n s_i(x_i-x_{i-1}), \qquad \int_a^b t(x)\,dx = \sum_{i=1}^n t_i(x_i-x_{i-1})$$

e

$$\int_a^b (s+t)(x)\,dx = \sum_{i=1}^n (s_i+t_i)(x_i-x_{i-1})$$

Direto da definição de integral.

Mas, das fórmulas acima, temos

$$\int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_{i-1})$$

Por quê?

$$= \sum_{i=1}^{n} (s_i + t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b (s+t)(x)\,dx$$

Exercício: Essa prova ainda não está completa. Por quê?

Por exemplo, suponha que s e t estejam definidas no intervalo $[0,1]$ e

$$s(x) = 5 \quad \text{se} \quad x \in [0,1]$$

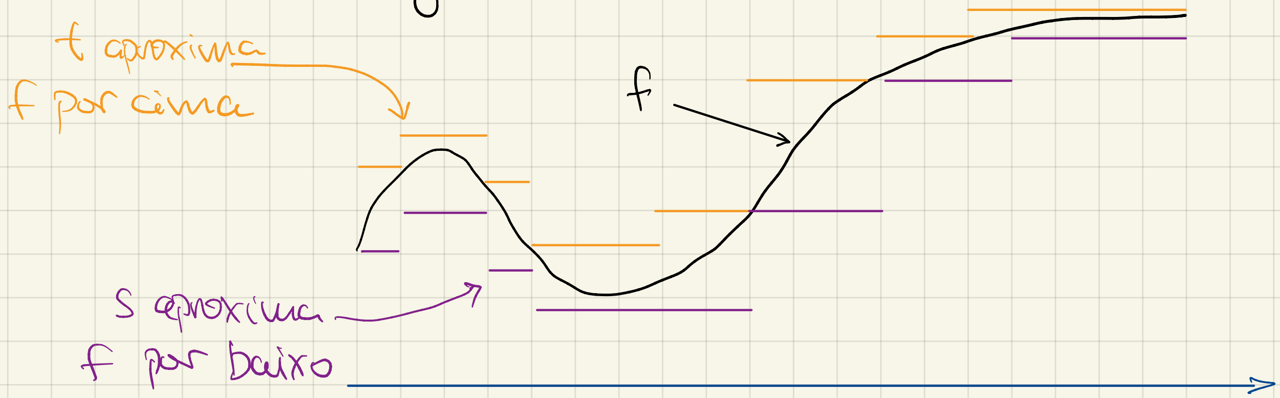
$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [0, 1/2) \\ 2 & \text{se} \quad x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Calcule $s+t$ e calcule $\int_0^1 s(x)dx$, $\int_0^1 t(x)dx$ e $\int_0^1 (s+t)(x)\,dx$.

O que ainda falta para completar a prova? Você consegue fazê-lo?

Integrando funções mais gerais

Agora que sabemos integrar funções degrau, vamos dar um passo importante e generalizar a definição de integral para uma classe bem mais ampla de funções. A ideia é, como sempre, calcular a área (com sinal) entre o gráfico da função e o eixo horizontal.

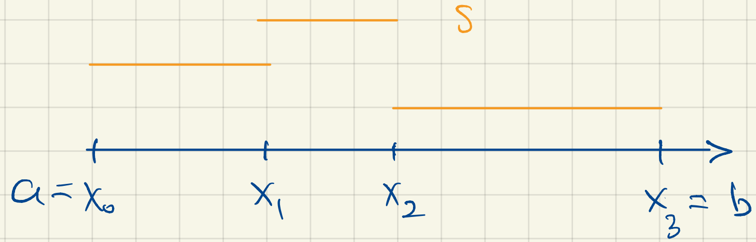


Vamos aproximar a função f que queremos integrar por cima e por baixo por funções degrau, fazê-lo de forma cada vez mais eficiente e "passar ao limite". A forma logicamente mais eficiente de descrever o que se faz é a seguinte. Para começar, um

Teorema: Sejam s e t funções degrau definidas no mesmo intervalo $[a,b]$ e suponha que $s < t$, isto é, $\forall x \in [a,b]$, $s(x) < t(x)$. Então

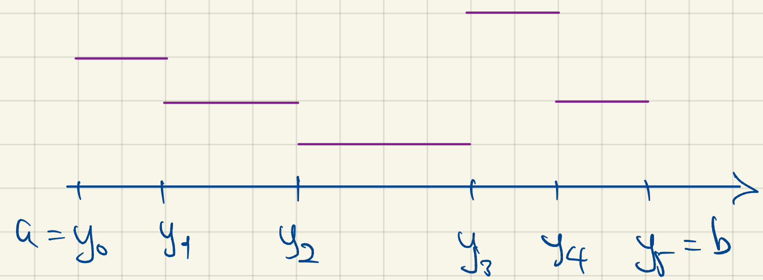
$$\int_a^b s(x)dx < \int_a^b t(x)dx$$

Observação útil (mas simples): Se s e t são funções degrau definidas no mesmo intervalo, podemos supor que as partições que as definem são as mesmas. Isso porque se



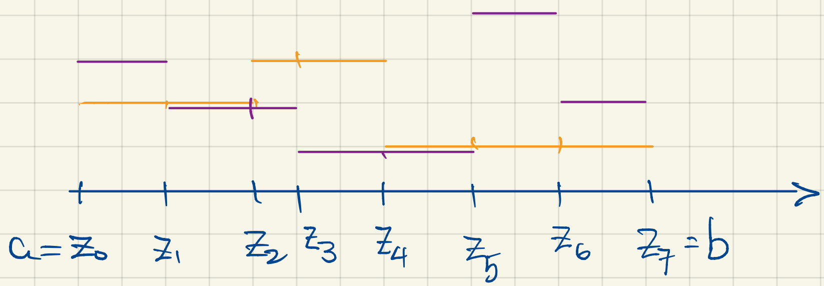
$$X = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\} \quad \text{e}$$

$$Y = \{y_0 = a, y_1, y_2, \ldots, y_m = b\}$$



são as partições em cujos intervalos s e t são constantes, respectivamente, podemos simplesmente tomar a união das duas

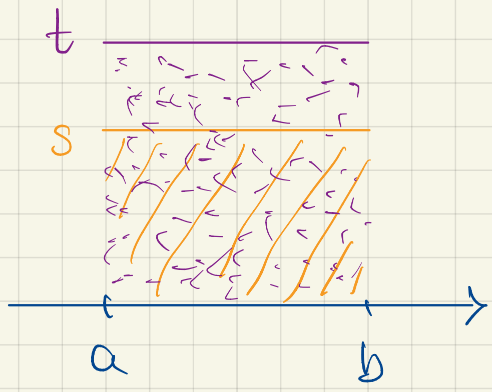
$$Z = X \cup Y$$



e definir s e t nos novos intervalos exatamente como eram antes. Isso quer dizer que sempre podemos considerar duas funções escada definidas no mesmo intervalo como tendo as mesmas partições.

<u>Prova do Teorema</u>: Se $s(x) \equiv s$ e $t(x) \equiv t$ (o símbolo $\equiv$ deve ser lido, aqui pelo menos, "é constante igual a"), então

$$\int_a^b s(x)\,dx = s.(b-a) = \text{área amarela}$$



$$\int_a^b t(x)\,dx = t.(b-a) = \text{área roxa}$$

Se, por hipótese, $s = s(x) < t(x) = t$, segue que

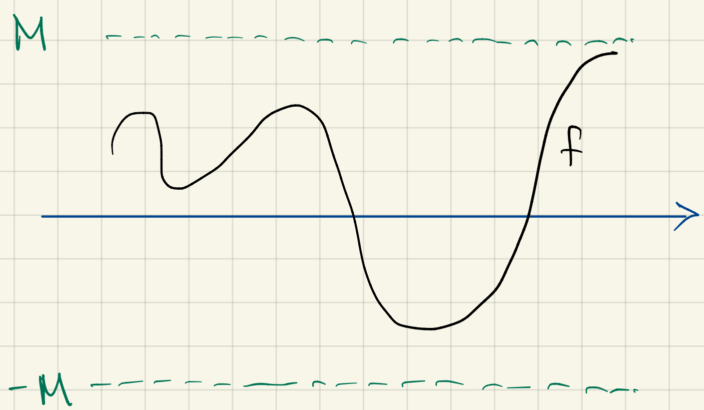
$$\int_a^b s(x)\,dx = s\,(b-a) < t\,(b-a) = \int_a^b t(x)\,dx.$$

<u>Exercício</u>: Prove o caso geral, isto é, o caso em que s e t são funções escada quaisquer.

Voltando a integrais mais gerais, dizemos que uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é <u>limitada</u> se existe um número $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tal que $\forall x \in [a,b]$

$$-M \leq f(x) \leq M \iff |f(x)| \leq M.$$

Veja ao lado o gráfico de uma função limitada.
Se existe $M > 0$ tal que $f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$, dizemos que f é limitada superiormente.
Analogamente, definimos uma função limitada inferiormente. Uma função é limitada se é limitada superior e inferiormente.



É claro que, se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, existem funções degrau s, t, definidas em $[a,b]$, tais que

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Basta, por exemplo, tomarmos $s(x) \equiv -M$ e $t(x) = +M$.

Definição de integral de uma função limitada: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é INTEGRÁVEL no intervalo $[a,b]$ se existe um único número $I \in \mathbb{R}$ tal que, dadas quaisquer funções escada $s \leq f \leq t$, valem as desigualdades

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\,dx.$$

Isto é, dizemos que f é integrável se existe um único número real I que esta "sanduichado" entre as integrais de quaisquer duas funções escada s e t que "sanduicham" f:

$$\exists!\, I \in \mathbb{R} \text{ tal que } \quad s(x) \leq f(x) \leq t(x) \ \ \forall x \in [a,b] \implies$$

$$\int_a^b s(x)dx \leq I \leq \int_a^b t(x)dx .$$

Nesse caso, o número I é chamado a integral de f em [a,b] e é denotado por

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

Mas como tentar decidir se uma função limitada é ou não integrável?

Definimos

$$S = \left\{ \int_a^b s(x)dx \ : \ s \text{ é função escada e } s \leq f \right\}$$

$$T = \left\{ \int_a^b t(x)dx \ : \ t \text{ é função escada e } f \leq t \right\}$$

Todos os números do conjunto S são menores ou iguais a todos do conjunto T, já que $s \leq f \leq t$ implica que $s \leq t$ e, pelo teorema, sabemos que isso implica que

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \int_a^b t(x)\,dx.$$

Assim, pelo Axioma de Completude dos números reais (já que ambos os conjuntos S e T são não-vazios, já que f é limitada), segue que se $s \leq f \leq t$

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \sup S \leq \inf T \leq \int_a^b t(x)\,dx.$$

Portanto, para que f seja integrável, o que precisamos é que $\sup S = \inf T$.

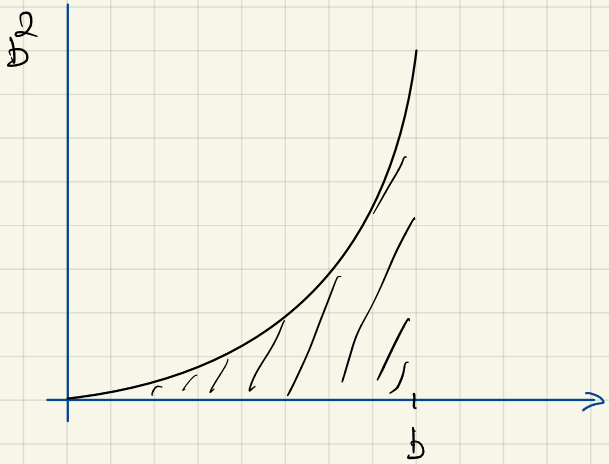
Nesse caso $\int_a^b f(x)\,dx = \sup S = \inf T$. Definimos os números

$$\underline{I}(f) = \sup S \quad \leftarrow \text{Integral inferior de } f$$

$$\overline{I}(f) = \inf T \quad \leftarrow \text{Integral superior de } f$$

Assim, f é integrável se e só se suas integrais superior e inferior são iguais.

Exemplo: Isso foi exatamente o que fizemos para calcular a área abaixo da parábola $f(x) = x^2$.

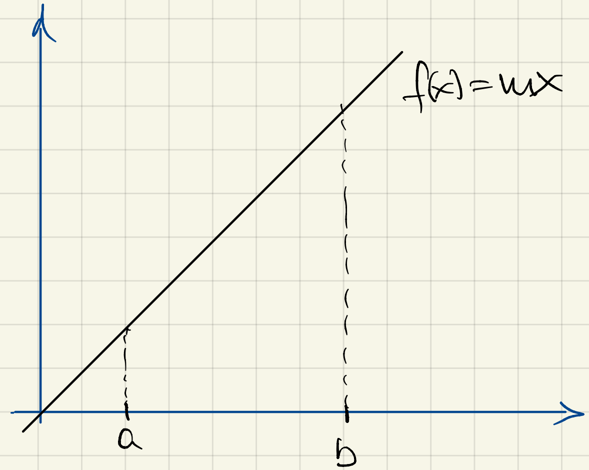


O que calculamos naquele exemplo mostra exatamente que

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}$$

Exemplo: Seja $m \in \mathbb{R}$ e $f(x) = mx$. Vamos calcular a integral

$$\int_a^b f(x) \, dx .$$



Para isso, temos que calcular

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \int_a^b s(x) dx : s \leq f \right\}$$

$$\overline{I}(f) = \inf \left\{ \int_a^b t(x) dx : f \leq t \right\}$$

e mostrar que esses supremo e ínfimo são iguais. Mas note que, se encontramos duas seqüências de funções degrau $s_n(x)$ e $t_n(x)$ tais que $s_n \leq f \leq t_n$

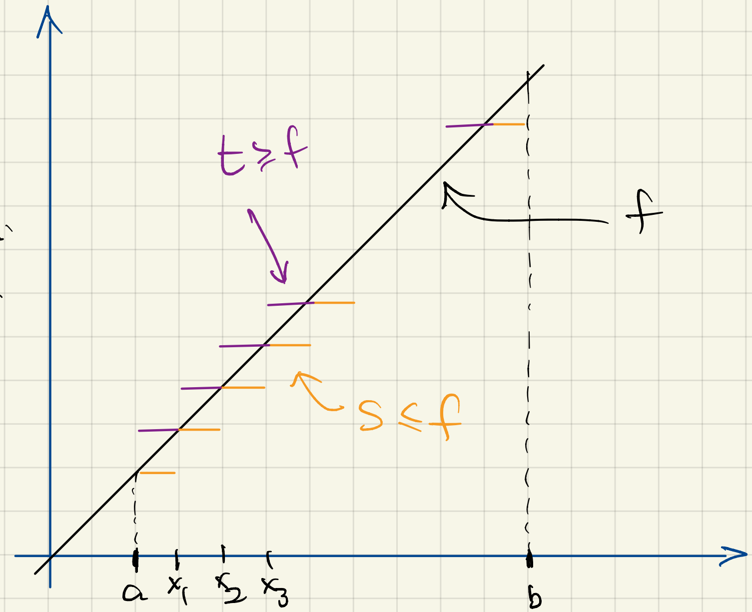
e tais que

$$\sup\left\{ \int_a^b s_n(x)dx : n \in \mathbb{N} \right\} = \inf\left\{ \int_a^b t_n(x)dx : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\underbrace{\text{então disso segue que } \quad \underline{I}(f) = \overline{I}(f)}_{\text{Por quê?}}$ e teremos mostrado que f é integrável.

Se, além disso, tivermos sido capazes de calcular o supremo e o ínfimo acima, teremos então calculado a

$$\int_a^b f(x)dx.$$



Fazemos aqui como fizemos antes e como faremos outras vezes a seguir. Começamos dividindo o intervalo $[a,b]$ em n intervalos iguais de tamanhos iguais

$$h = \frac{b-a}{n}$$

usando os pontos

$$x_0 = a, \ x_1 = a+h, \ x_2 = x_1 + h, \ \dots, \ x_k = a+kh, \ \dots \ x_n = b.$$

Vamos agora supor que $m > 0$. Nesse caso f é uma função crescente, isto é, se $x < y$ então $f(x) < f(y)$. Definimos então as funções degrau

$$\left.\begin{aligned} s_n(x) &= f(x_{k-1}) = m x_{k-1} \\ t_n(x) &= f(x_k) = m x_k \end{aligned}\right\} \text{ se } x \in [x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Assim, lembrando que $x_k = a + kh$ e que $h = (b-a)/n$, temos

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} m x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) = m \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)h)\, h$$

$$= mnah + mh^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1)$$

$$= ma(b-a) + m\frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= ma(b-a) + m\frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$= ma(b-a) + \frac{m(b-a)^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

<u>Exercício</u>: Verifique que vale a seguinte igualdade:

$$\int_a^b t_n(x)\,dx = ma(b-a) + \frac{m(b-a)^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

É claro que, como não poderia deixar de ser, $\int_a^b s_n(x)\,dx < \int_a^b t_n(x)\,dx$.

Além disso, como $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, isto é, $1/n$ pode ser feito arbitrariamente pequeno, escolhendo n suficientemente grande, temos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \int_a^b s_n(x)\,dx \right\} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = ma(b-a) + \frac{m(b-a)^2}{2}$$

e, analogamente

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \int_a^b t_n(x)\,dx \right\} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx = \qquad = \frac{m}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

Assim, acabamos de provar que

$$\boxed{\int_a^b mx\,dx = m\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)} \qquad (*)$$

O que fizemos até agora assumiu que $m > 0$. Essa hipótese foi usada para concluir que $f(x) = mx$, com $m > 0$, é uma função crescente. Se $m < 0$, então $f(x) = mx$ é uma função decrescente, isto é, se $x < y$, então $f(x) > f(y)$.

Exercício: Verifique o que deve ser modificado na prova acima caso $m < 0$ e conclua que a fórmula (*) vale para qualquer $m \in \mathbb{R}$. O que acontece se $m = 0$?

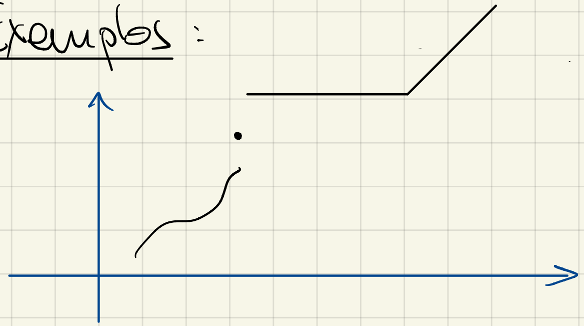
Esse exemplo, como o exemplo de $f(x) = x^2$, contém ingredientes que nos ajudam a calcular integrais de funções bem mais gerais.

Uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada monótona se é crescente ou decrescente. Um pouco mais geralmente, dizemos que

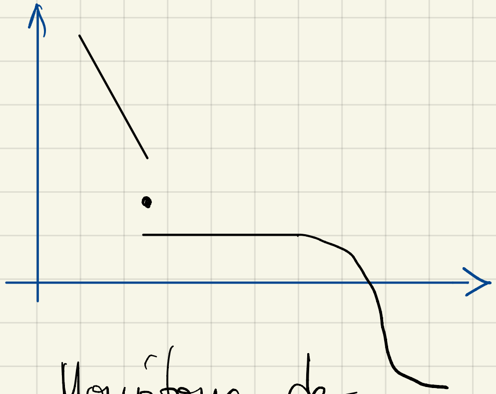
$$f \text{ é monótona } \begin{cases} \text{crescente} \\ \text{decrescente} \end{cases} \text{ se } \begin{cases} x < y \implies f(x) \leq f(y) \\ x < y \implies f(x) \geq f(y) \end{cases}.$$

Uma função é monótona por partes se é possível dividir o intervalo $[a,b]$ por pontos $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, tais que f é monótona em cada $[x_{i-1}, x_i]$.

Exemplos:



Monótona crescente



Monótona de-crescente

Monótona por partes.

Exemplos

Sem o igual

$f(x) = x^3$ é monótona (estritamente) crescente em $\mathbb{R}$, i.e., $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$g(x) = x^2$ é monótona estritamente $\begin{cases} \text{decrescente em } \{x \leq 0\} \\ \text{crescente em } \{x \geq 0\} \end{cases}$

Exercício: Prove que, se p é qualquer natural, a função $f(x) = x^p$ é estritamente crescente em $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Exemplo: $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ é crescente. Se $x < y$, então temos

$$\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{y} + \sqrt{x}\right) = y - x > 0 \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} > 0.$$

Teorema: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona então f é integrável em $[a,b]$.

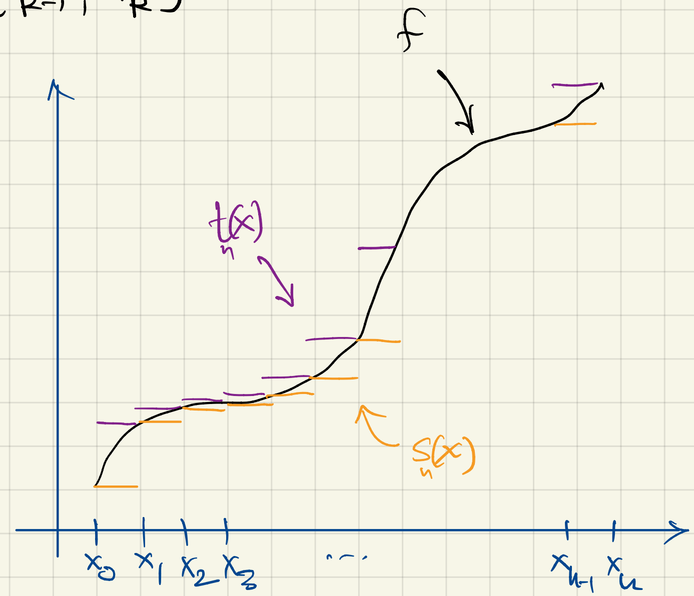
Prova: Vamos fazer a demonstração no caso em que f é crescente. A prova para funções decrescentes é análoga e fica de exercício.

Como fizemos nos exemplos anteriores, tomamos $n \in \mathbb{N}$ e dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos iguais de tamanho $h = (b-a)/n$ pelos pontos

$$x_0 = a, \quad x_1 = a+h, \quad x_2 = x_1 + h, \quad \dots, \quad x_k = x_{k-1} + h, \quad \dots, \quad x_n = a + n \cdot h = b$$

e definimos as funções escada $s_n, t_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ também como fizemos anteriormente, pondo

$$\left.\begin{aligned} s_n(x) &= f(x_{k-1}) \\ t_n(x) &= f(x_k) \end{aligned}\right\} \quad \text{para } x \in [x_{k-1}, x_k)$$



Então

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,h = h \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$$

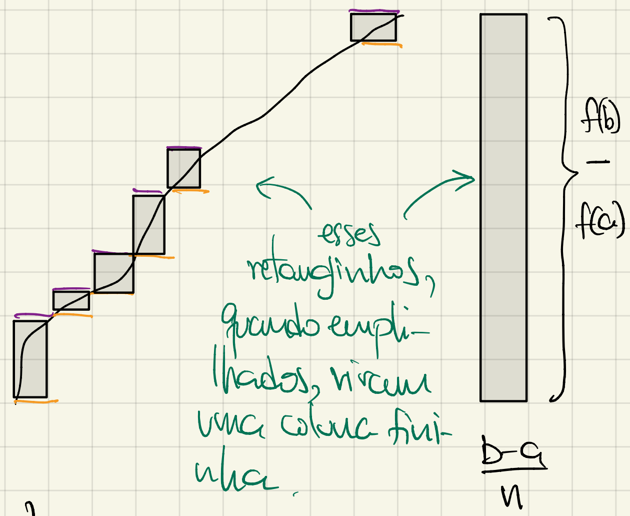
$$\int_a^b t_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,h = h \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

e, portanto,

Soma telescópica

$$(*)\quad \int_a^b t_n(x)\,dx - \int_a^b s_n(x)\,dx = h\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right] = h\,\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$= \frac{(b-a)\,\big(f(b)-f(a)\big)}{n}.$$



Aqui chegamos novamente a uma situação que já encontramos duas vezes antes. Para mostrar que f é integrável, temos que mostrar que

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^b s : s\le f\right\} = \inf\left\{\int_a^b t : t\ge f\right\} = \overline{I}(f)$$

Mas, por definição das funções acima, $s_n \le f \le t_n$ e, portanto,

$$(**)\quad \sup\left\{\int_a^b s_n\right\} \le \sup\left\{\int_a^b s : s\le f\right\} \le \inf\left\{\int_a^b t : t\ge f\right\} \le \inf\left\{\int_a^b t_n\right\}$$

Da igualdade $(*)$, segue que a diferença $\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = C/n$ pode ser tornada tão pequena quanto queiramos tomando n grande o bastante.

$(b-a)(f(b)-f(a))$

Mas isso implica que $\sup\left\{\int_a^b s_n\right\} = \inf\left\{\int_a^b t_n\right\}$, que pelas desigualdades (∗∗), implicam que

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

que é o que queríamos provar $\square$

<u>Exemplo</u>: Já vimos que a integral $\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$, mas vejamos isso novamente e mais geralmente. Seja então $p \in \mathbb{N}$ e calculemos a integral

$$\int_0^b x^p\,dx.$$

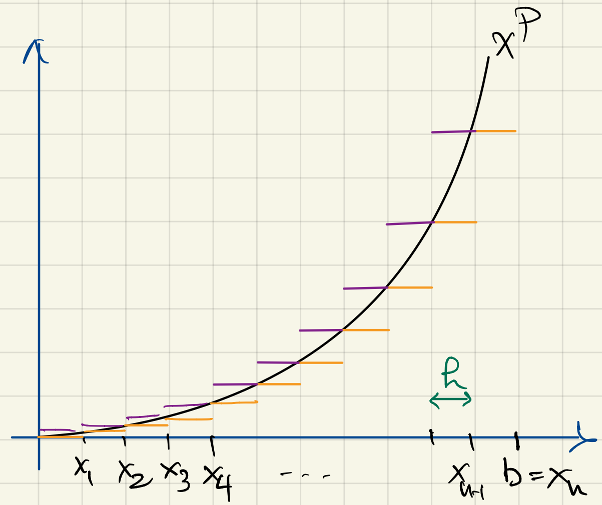
Note, para começar, que uma das propriedades da ordem nos números reais é $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d \Rightarrow 0 \leq ac < bd$. Disso segue que diretamente que $0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq x^2 < y^2$. Por indução, prova-se também que $0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq x^p < y^p \quad \forall p \in \mathbb{N}$. Isto é, a função $f(x) = x^p$ é monótona (estritamente) crescente e, do teorema anterior, segue que $f(x) = x^p$ é integrável em qualquer intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$. Mas isso é apenas parte da história: qual o valor da integral?

Para calcular o valor da integral, vamos usar as seguintes desigualdades cujas provas estão indicadas no exercício 13, da seção I.4.10, p.45, do livro texto:

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

Nós provamos essas desigualdades para $p=2$ nas notas "Integral de x^2".

Para calcular a integral $\int_0^b x^p dx$ faremos exatamente como já fizemos antes, mais de uma vez: dividimos o intervalo $[0,b]$ em n partes iguais de tamanho $h = b/n$ e consideramos as funções degrau



$$\left.\begin{aligned} s_n(x) &= f(x_{k-1}) = (x_{k-1})^p \\ t_n(x) &= f(x_k) = (x_k)^p \end{aligned}\right\} \text{ para } x \in (x_{k-1}, x_k)$$

onde $x_k = kh$ para $k = 0,1,2,\ldots,n$. Como $f(x) = x^p$ é monótona crescente, essas escolhas (para s_n e t_n) garantem que $s_n \leq f \leq t_n$, e isso vale para qualquer escolha de $n \in \mathbb{N}$.

Calculamos então as integrais das funções s_n e t_n, lembrando que $h = b/n$:

$$\int_0^b s_n(x)\,dx = h \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1})^p = h \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)h\right]^p = h^{p+1} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^p$$

$$= \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n-1} k^p .$$

Analogamente

$$\int_0^b t_n(x)\,dx = h \sum_{k=1}^{n} (x_k)^p = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p .$$

Portanto

$$\int_0^b t_n - \int_0^b s_n = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \cdot \left(\sum_{1}^{n} k^p - \sum_{1}^{n-1} k^p \right) = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \cdot n^p = \frac{b^{p+1}}{n}$$

Note que até aqui estamos repetindo a prova do teorema anterior no caso especial da função $f(x) = x^p$. A constante $C = (b-a)(f(b)-f(a))$ da prova é, nesse caso, $(b-0)(b^p - 0) = b^{p+1}$, que aparece acima. Como na prova do teorema, tomando n grande, concluímos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \int_0^b s_n \right\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \int_0^b t_n \right\}$$

e, como $s_n \leq f \leq t_n$, isso implica que f é integrável. Mas disso já sabíamos e o que queremos é calcular o valor da integral, isto é, o valor comum do supremo e do ínfimo acima. É aqui que entram as desigualdades (*) de duas páginas atrás. Delas segue que

$$\int_0^b s_n(x)\,dx = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \cdot \sum_{1}^{n-1} k^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{1}^{n} k^p = \int_0^b t_n(x)\,dx$$

Como o número $b^{p+1}/(p+1)$ está "sanduichado" entre as integrais $\int_0 s_n$ e $\int_0 t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e como $b^{p+1}/(p+1)$ não depende de n, disso segue que (mas isso não é óbvio e seria bom você pensar bem por que disso de fato segue que)

$$\sup\left\{ \int_0^b s_n \right\} = \inf\left\{ \int_0^b t_n \right\} = \frac{b^{p+1}}{p+1},$$

isto é, tendo sido capazes de calcular esses supremo e ínfimo, concluímos que

$$\boxed{\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}}, \quad p \in \mathbb{N}.$$