DEPENDÊNCIA LINEAR

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial e sejam $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Considere a equação vetorial

$$(*) \quad \boxed{x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0}\;;$$

vetor nulo.

onde $x_1, \ldots, x_m$ são incógnitas.

A m-upla $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, com $(x_1, \ldots, x_m) = (0, 0, \ldots, 0)$ é claramente uma solução de (*) já que $0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_m = 0$

Essa solução $(x_1, \ldots, x_m) = (0, 0, \ldots, 0)$ é chamada SOLUÇÃO TRIVIAL.

Note que toda equação vetorial sempre tem a solução trivial.

DEF: Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é LINEARMENTE INDEPENDENTE (LI) se (*) possui apenas a solução trivial.

Dizemos que S é LINEARMENTE DEPENDENTE (LD) se não for LI, isto é, se (*) tiver solução não trivial $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Exemplos:

(1) $S = \{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{v_2}, \underbrace{(1,2,1)}_{v_3}\}$

$$x_1(1,1,1) + x_2(0,1,1) + x_3(1,2,1) = (0,0,0)$$

Temos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{e } L_3 - L_2 \leftrightarrow L_3]{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esse sistema linear tem apenas a solução trivial, logo $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI.

(2) Em $M_2(\mathbb{R})$ considere as matrizes

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

A equação vetorial $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ leva ao sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

As equações distintas são

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad\;\; x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Este é um sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações, portanto, possui soluções não trivial.

Logo $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

Resolvendo o sistema, temos

$$x_2 = -4x_3$$

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 = 8x_3 - 3x_3 = 5x_3.$$

Se tomarmos, por exemplo, $x_3 = 1$

$x_1 = 5$, $x_2 = -4$ $x_3 = 1$

$$5\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-8+3 & 5-8+3 \\ -4+4 & -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $5v_1 - 4v_2 + 1.v_3 = 0$ e temos que S é LD.

(3) Mostre que as funções $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ são LI em $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Suponha que $x_1 \cos t + x_2 \operatorname{sen} t = 0$, ↓ função nula

isto é, $x_1 \cos t + x_2 \operatorname{sen} t = 0$ (*) para todo $t \in \mathbb{R}$,

Se vale (*) para todo t, vale, em particular, para $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$.

Se $t = 0$ $\quad x_1 \underbrace{\cos 0}_{} + x_2 \operatorname{sen} 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$t = \frac{\pi}{2}$ $\quad x_1 \cos \frac{\pi}{2} + x_2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$.

Logo $\{\cos t, \operatorname{sen} t\}$ é LI.

(4) Em $P_3(\mathbb{R})$, verifique se os polinômios

$$\underbrace{t^3 - 1}_{v_1},\quad \underbrace{3t^3 + 2t^2 + t}_{v_2},\quad \underbrace{3t^3 + 4t^2 + 2t + 3}_{v_3}.$$

são LI ou LD

Suponha que $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$

Temos então

$$(x_1 + 3x_2 + 3x_3)t^3 + (2x_2 + 4x_3)t^2 + (x_2 + 2x_3)t$$
$$(-x_1 + 3x_3).1 = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + \phantom{3x_2 +{}} 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Escalonando a matriz do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo $x_2 = -2x_3$

$x_1 = -3x_2 - 3x_3 = 3x_3$

Tomando $x_3 = 1$, por exemplo; temos

$x_2 = -2$

$x_1 = 3$

$$3(t^3 - 1) - 2(3t^3 + 2t^2 + t) + 1(3t^3 + 4t^2 + 2t + 3)$$

$= 0$.

Logo, existem combinações lineares não triviais tais que $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$.

Portanto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

16. $S = \{\underbrace{(1,0,\alpha)}_{v_1}, \underbrace{(1,1,\alpha)}_{v_2}, \underbrace{(1,1,\alpha^2)}_{v_3}\}$

Vamos considerar a equação

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

Então
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Temos então, a matriz do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

Escalonar a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 - \alpha L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha \end{bmatrix}$$

Se $\alpha^2 - \alpha \neq 0$, teremos 3 pivôs, logo os vetores são LI

Se $\alpha^2 - \alpha = 0$, o sistema tem infinitas soluções e portanto, tem sol. não trivial

Logo S é LI $\iff \alpha^2 - \alpha \neq 0 \iff \alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.

Propriedades da Dependência Linear

(1) $\{v\}$ é LI $\Leftrightarrow$ $v \neq 0$.

($\Rightarrow$) Suponha que $v = 0$. Então $0 = 1 . v$.
Logo $\{v\}$ é LD.

($\Leftarrow$) Se $v \neq 0$, então, se $av = 0 \Rightarrow a = 0$.

(2) $\{v_1, v_2\}$ é LD $\Leftrightarrow$ $\exists\, a$ tq $v_2 = a v_1$
ou existe b tal que $v_1 = b v_2$.

($\Leftarrow$) Suponha que $v_2 = a v_1$.
Então $a v_1 + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_2 = 0$
é a equação vetorial tem
sol. não trivial.
Do mesmo modo, se $v_1 = b v_2$, temos
$\underbrace{1}_{\neq 0} v_1 + (-b) v_2 = 0$. Então a equação vetorial
$x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$ tem sol.
não trivial.

($\Rightarrow$) Suponha que $\{v_1, v_2\}$ é LD.
Então existem a_1, a_2 não ambos nulos tais
que $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$.
Se $a_1 \neq 0$, $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$.
Se $a_2 \neq 0$, $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$.

(3) Todo subconjunto de um conjunto LI é LI.

Suponha que $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LI. Se $\{v_{i_1}, \dots v_{i_k}\} \subset S$ fosse LD, então, existiriam escalares não todos nulos tais que $a_1 v_{i_1} + \dots + a_k v_{i_k} = 0$.

Reordenando S, temos

$$S = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}, v_{i_{k+1}}, \dots, v_{i_m}\}.$$

Então $a_1 v_{i_1} + a_2 v_{i_2} + \dots + a_k v_{i_k} + 0 v_{i_{k+1}} + \dots + 0 v_{i_m} = 0$ e os a_i's não são todos nulos.

Logo S é LD.

Outro modo de enunciar (3).

Se $S \supset T$ e T é LD, então S é LD.

(4) Se $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LD, então (pelo menos) um dos vetores de S é combinação linear dos outros.

Suponha que $a_1, \ldots, a_m$ são escalares NÃO todos nulos tais que
$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0.$$

Suponha que $a_j \neq 0$.

Então $$a_j v_j = (-a_1)v_1 + (-a_2)v_2 + \cdots + (-a_{j-1})v_{j-1} + (-a_{j+1})v_{j+1} + \cdots + (-a_m)v_m.$$

Como $a_j \neq 0$, podemos multiplicar tudo por a_j^{-1}.

Logo $$v_j = \left(\frac{-a_1}{a_j}\right)v_1 + \left(\frac{-a_2}{a_j}\right)v + \cdots + \left(\frac{-a_{j-1}}{a_j}\right)v_{j-1} + \left(\frac{-a_{j+1}}{a_j}\right)v_{j+1} + \cdots + \left(\frac{-a_m}{a_j}\right)v_m.$$

(5) Vale a recíproca de (4)

Se $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é tal que um dos vetores de S é combinação linear dos outros, então S é LD.

Se $$v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_m v_m$$

então $$a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + (-1) v_j + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_m v_m = 0$$

esse escalar é $\neq 0$!!

(18) V espaço vetorial

$\{u, v, w\}$ LI $\iff \{u+v, u+w, v+w\}$ LI

($\Rightarrow$) $\{u, v, w\}$ LI (Hipótese)

Tese: Provar que $\{u+v, u+w, v+w\}$ é LI.

Suponha que $x_1(u+v) + x_2(u+w) + x_3(v+w) = 0$

Queremos provar que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Mas $x_1(u+v) + x_2(u+w) + x_3(v+w) = 0$

$\Rightarrow (x_1+x_2)u + (x_1+x_3)v + (x_2+x_3)w = 0$

Como $\{u, v, w\}$ é LI, temos que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

MATRIZ DO SISTEMA

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3 pivôs

Logo $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\underbrace{\{u+v, u+w, v+w\} \text{ é LI}}_{\text{Hipótese}}$.

Queremos mostrar que $\underbrace{\{u, v, w\} \text{ é LI}}_{\text{Tese}}$.

Vamos partir de uma combinação linear

$$au + bv + cw = 0 .$$

Queremos provar que $a = b = c = 0$.

Temos que usar a hipótese...

Note que: $u = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u+w) - \frac{1}{2}(v+w)$

$$v = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(v+w) - \frac{1}{2}(u+w)$$

$$w = \frac{1}{2}(u+w) + \frac{1}{2}(v+w) - \frac{1}{2}(u+v) .$$

Assim

$$au + bv + cw =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(a+b-c)}_{\alpha}(u+v) + \underbrace{\frac{1}{2}(a-b+c)}_{\beta}(u+w)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}(-a+b+c)}_{\gamma}(v+m) = 0$$

Como $\{u+v, u+w, v+w\}$ é LI temos que

$$\begin{cases} a+b-c = 0 \\ a-b+c = 0 \\ -a+b+c = 0 \end{cases}$$

Esse sistema tem como matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3 pivôs

O sistema tem apenas a soluçã trivial.

Logo $\{u, v, w\}$ é LI.

TEOREMA: Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto $G = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Então todo subconjunto de V com mais do que m elementos é LD.

Dem.:

Seja $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ com $n > m$.

Vamos mostrar que S é LD.

Suponha que

$$\boxed{x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n = 0} \quad (*)$$

Mostrar que $(*)$ tem solução não trivial.

Escreva $u_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Então $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n = 0$

$$\Longrightarrow x_1 \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j} v_j \right) + x_2 \left(\sum_{j=1}^{m} a_{2j} v_j \right) + \cdots + x_n \left(\sum_{j=1}^{m} a_{nj} v_j \right)$$

$$= 0 \quad (**)$$

Vamos "abrir" $(**)$:

$$x_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1m}v_m) +$$
$$x_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2m}v_m) +$$
$$\text{— — — — — — —}$$
$$x_n(a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nm}v_m) = 0$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n)v_1 +$$
$$(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n)v_2 +$$
$$\text{— — — — — — —} \quad +$$
$$(a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm})v_m = 0$$

Se o sistema

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = 0$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = 0$$
$$\text{— — — — — — —}$$
$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = 0$$

Tiver solução não trivial $(x_1, \ldots, x_n)$ acabou!

E tem, pois é um sistema com mais incógnitas do que equações já que $n > m$.

Logo (*) possui solução não trivial. $\blacksquare$