Otimização Não-Linear – Primeira Prova

20 de outubro de 2023

1

Dizemos que $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a partir de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ quando existe $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ temos

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}).$$

Prove que se f é diferenciável em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{d}^T \nabla f(\boldsymbol{x}) < 0$, então $\boldsymbol{d}$ é uma direção de descida.

2

Prove que um minimizador $\boldsymbol{x}^*$ de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaz $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$. Dica: utilize o resultado da Questão 1.

3

Considere o problema irrestrito $\min\{f_\gamma(\boldsymbol{x}) := \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 + \gamma \|\boldsymbol{x}\|_1\}$ e denote por $\boldsymbol{x}_\gamma^*$ a sua solução. Prove que se $\alpha > \beta$ então $f_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha^*) \geq f_\beta(\boldsymbol{x}_\beta^*)$. Generalize.

4

Considere o seguinte algoritmo de gradientes conjugados:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \lambda_k \boldsymbol{d}^k$$

onde

$$\lambda_k = \arg\min f(\boldsymbol{x}^k + \lambda \boldsymbol{d}^k),$$

$$\beta_k = \frac{\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^T \left(\nabla f(\boldsymbol{x}^k) - \nabla f(\boldsymbol{x}^{k-1})\right)}{\nabla f(\boldsymbol{x}^{k-1})^T \nabla f(\boldsymbol{x}^{k-1})} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{d}^k = -\nabla f(\boldsymbol{x}^k) + \beta_k \boldsymbol{d}^{k-1}.$$

Mostre que $\boldsymbol{d}^k$ é uma direção de descida para f a partir de $\boldsymbol{x}^k$. Dica: utilize-se do fato de termos busca linear exata para mostrar que $\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{d}^{k-1} = 0$ e também utilize o resultado da questão 1.